ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 2 Μαΐου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου.

Α2 α) Σωστό.
β) Λάθος.
γ) Λάθος.
δ) Λάθος.
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΓ$:

- $ΑΒ = ΒΓ$ (υπόθεση)
- $ΑΔ = ΕΓ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ = ΒΕ$ (υπόθεση)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Τότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΕΓ$:

- $ΑΔ = ΕΓ$ (υπόθεση)
- $ΑΓ$ (κοινή πλευρά)
- $Δ\hat{Α}Γ = Α\hat{Γ}Ε$ (από Β1 ερώτημα)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Τότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Β3. <u>α’ τρόπος</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι: $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ που έχει αποδειχθεί από το Β2 ερώτημα.

<u>β’ τρόπος</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι $AM = M\Gamma$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $ME\Gamma$:

- $A\Delta = E\Gamma$ (υπόθεση)
- $A\hat{\Delta}M = M\hat{E}\Gamma$ (από Β2 ερώτημα)
- $\Delta\hat{A}M = M\hat{\Gamma}E$ (ως διαφορά ίσων γωνιών)

$$\left.\begin{aligned} \Delta\hat{A}M &= \Delta\hat{A}\Gamma - M\hat{A}\Gamma \\ M\hat{\Gamma}E &= E\hat{\Gamma}A - M\hat{\Gamma}A \end{aligned}\right\} \text{ όπου } \Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \text{ (από Β1 ερώτημα) και } M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}E$$

(από Β2 ερώτημα) οπότε $\Delta\hat{A}M = M\hat{\Gamma}E$ ως διαφορά ίσων γωνιών.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα

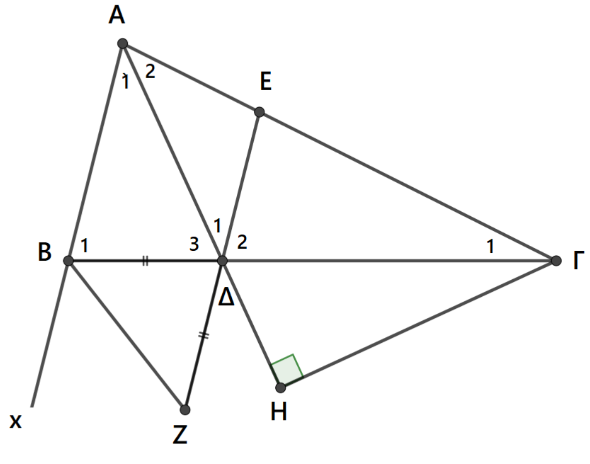
Τότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AM = M\Gamma$.

Β4. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔKB και $BE\Lambda$:

- $B\hat{K}\Delta = B\hat{\Lambda}E = 90^0$ (υπόθεση)
- $B\Delta = BE$ (υπόθεση)
- $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{B}E$ (από Β1 ερώτημα)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα. Τότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, συνεπώς $\Delta K = E\Lambda$.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. • $\mathrm{A\Delta}$ διχοτόμος του τριγώνου $\mathrm{BA\Gamma}$, άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

• $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ ως εντός έναλλάξ γωνίες των $\mathrm{AB} // \mathrm{E\Delta}$ με τέμνουσα την $\mathrm{A\Delta}$.

Οπότε $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$ δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AE} = \mathrm{E\Delta}$.

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι: $x\hat{B}Z = Z\hat{B}\Delta$.

• Το τρίγωνο $\mathrm{B\Delta Z}$ είναι ισοσκελές επειδή $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta Z}$, άρα $\Delta\hat{B}Z = \Delta\hat{Z}B$.

• $\mathrm{AB} // \mathrm{E\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{A}x // EZ$, άρα $x\hat{B}Z = B\hat{Z}\Delta$ ως εντός έναλλάξ γωνίες των $\mathrm{A}x // EZ$ με τέμνουσα την BZ.

Οπότε $x\hat{B}Z = Z\hat{B}\Delta$.

Γ3. i) $2\hat{\Gamma}_1 - \hat{B}_1 = \dfrac{\hat{A}_{o\lambda}}{2}$ σχέση (1), $\hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1 = 20^0$ σχέση (2).

Από το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{A}_{o\lambda} + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \hat{A}_{o\lambda} + 20 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A}_{o\lambda} + 2\hat{\Gamma}_1 = 160^0 \text{ σχέση (3)}$$

Από (1) έχουμε: $2\hat{\Gamma}_1 - \hat{B}_1 = \dfrac{\hat{A}_{o\lambda}}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 4\hat{\Gamma}_1 - 2\hat{B}_1 = \hat{A}_{o\lambda} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$$4\hat{\Gamma}_1 - 2\left(20^0 + \hat{\Gamma}_1\right) = \hat{A}_{o\lambda} \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma}_1 - 40^0 - 2\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_{o\lambda} \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}_1 - \hat{A}_{o\lambda} = 40^0 \text{ σχέση (4)}$$

Από (3) - (4) έχουμε: $2\hat{A}_{o\lambda} = 120^0 \Leftrightarrow \hat{A}_{o\lambda} = 60^0$.

ii) $\hat{A}_{o\lambda} = 60^0$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{A}_{o\lambda}}{2} = \dfrac{60^0}{3} = 30^0$.

Το τρίγωνο $\mathrm{AH\Gamma}$ είναι ορθογώνιο με μία γωνία οξεία του $\hat{A}_2 = 30^0$, οπότε θα ισχύει ότι: $\mathrm{H\Gamma} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{H\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}$.

Γ4. Από (3) + (4) έχουμε: $4\hat{\Gamma}_1 = 200^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 50^0$ και από (2) έχουμε: $\hat{B}_1 = 70^0$.

Στο τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Delta}_3 = 180^0 \Leftrightarrow 30^0 + 70^0 + \hat{\Delta}_3 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Delta}_3 = 80^0$.

Το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ ισοσκελές (από Γ1 ερώτημα) με $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 30^0$.

$\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{\Delta}_3$ σχηματίζουν ευθεία γωνία οπότε: $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^0 \Leftrightarrow$

$30^0 + \hat{\Delta}_2 + 80^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = 70^0$.

Στο τρίγωνο ΕΔΓ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 = 50^0 < \hat{\Delta}_2 = 70^0$, οπότε $ΕΔ < ΕΓ \overset{ΕΔ=ΑΕ}{\Leftrightarrow} ΑΕ < ΕΓ$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ε μέσο ΚΜ, άρα $ΚΕ = ΕΜ = \frac{ΚΜ}{2}$ σχέση (1).

Τ μέσο ΕΜ, άρα $ΤΜ = \frac{ΕΜ}{2} \overset{(1)}{=} \frac{ΚΜ/2}{2} = \frac{ΚΜ}{4}$ σχέση (2).

Όμοια: Ρ μέσο ΚΛ, άρα $ΚΡ = ΡΛ = \frac{ΚΛ}{2}$ σχέση (3).

Υ μέσο ΡΛ, άρα $ΥΛ = \frac{ΡΛ}{2} \overset{(3)}{=} \frac{ΚΛ/2}{2} = \frac{ΚΛ}{4}$ σχέση (4).

Επειδή $ΚΜ = ΚΛ \overset{(2),(4)}{\Leftrightarrow} ΤΜ = ΥΛ$ σχέση (5).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΤΔ και ΓΛΥ:

- $Μ\hat{Δ}Τ = Λ\hat{Γ}Υ = 90^0$ (υπόθεση)
- $ΤΜ = ΥΛ$ (σχέση (5))
- $\hat{Μ} = \hat{Λ}$ (ΚΜΛ ισοσκελές με ΚΜ=ΚΛ)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Τότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα.

Δ2. i) Για το ΔΤΥΓ έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} ΤΔ \perp ΜΛ \\ ΥΓ \perp ΜΛ \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΤΔ // ΥΓ$. Από το Δ1 ερώτημα έχουμε ότι $ΤΔ = ΥΓ$, οπότε το ΔΤΥΓ είναι παραλληλόγραμμο επειδή έχει 2 πλευρές παράλληλες και ίσες. Επειδή όμως έχει και μια γωνία ορθή πχ την $\hat{Δ} = 90^0$, το παραλληλόγραμμο ΔΤΥΓ γίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ii) Θα δείξουμε πρώτα ότι το $ΜΤΥΛ$ είναι τραπέζιο δηλαδή ότι $ΤΥ // ΜΛ$.

Το $ΔΤΥΓ$ από Δ2ii ερώτημα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $ΤΥ // ΔΓ // ΜΛ$, άρα το $ΜΤΥΛ$ είναι τραπέζιο. Από το Δ1 ερώτημα έχουμε $ΤΜ = ΥΛ$, οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες άρα το τραπέζιο θα είναι ισοσκελές.

Δ3. Στο τρίγωνο $ΚΜΛ$ έχουμε:

$\left.\begin{matrix} Ε \ \ \textit{μέσο} \ \ ΚΜ \\ Ρ \ \ \textit{μέσο} \ \ ΚΛ \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow ΕΡ = \frac{ΜΛ}{2}$ σχέση (6) και $ΕΡ // ΜΛ$ (επειδή ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών).

Το $ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο, οπότε $ΑΒ // ΔΓ \Leftrightarrow ΕΡ // ΜΛ$ άρα το $ΜΕΡΛ$ τραπέζιο γιατί έχει 2 πλευρές παράλληλες.

Το $ΤΥ$ είναι διάμεσος τραπεζίου (ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών) και θα ισχύει: $ΤΥ = \frac{ΕΡ + ΜΛ}{2} \overset{(6)}{=} \frac{\frac{ΜΛ}{2} + ΜΛ}{2} = \frac{\frac{3ΜΛ}{2}}{2} = \frac{3ΜΛ}{4}$.

Δ4. Το τρίγωνο $ΚΜΛ$ είναι ισοσκελές με $ΚΗ$ ύψος στην βάση του, οπότε θα είναι και διάμεσος, δηλαδή $ΜΗ = ΗΛ$.

Στο τρίγωνο $ΚΜΛ$ έχουμε:

$\left.\begin{matrix} Ρ \ \ \textit{μέσο} \ \ ΚΛ \\ Η \ \ \textit{μέσο} \ \ ΜΛ \end{matrix}\right\} ΡΗ = \frac{ΚΜ}{2} = ΚΕ$ και $ΡΗ // ΚΕ$ επειδή ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών, άρα το $ΚΡΗΕ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει 2 πλευρές παράλληλες και ίσες.

$\left.\begin{matrix} ΚΗ \perp ΜΛ \\ ΕΡ // ΜΛ \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow ΚΗ \perp ΕΡ$, οπότε το παραλληλόγραμμο $ΚΡΗΕ$ γίνεται ρόμβος επειδή οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα.