

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία από το Σχολικό Βιβλίο σελ 135

A2.

1. Λ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

A3.

- A → 4  
B → 2  
Γ → 1  
Δ → 5  
Ε → 3



## ΘΕΜΑ Β'

B1.

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\sigma v v(2\pi + x) = \sigma v v x$$

$$\sigma v v \left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \sigma v v \left(4\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$$

$$\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = -\eta\mu x$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\sigma v v(-x) = \sigma v v x$$

$$\sigma \varphi\left(\frac{21\pi}{2} + x\right) = \sigma \varphi(10\pi + \frac{\pi}{2} + x) = -\varepsilon \varphi x$$

$$A = \frac{(-\varepsilon \varphi x) \cdot \sigma v v x \cdot (-\eta \mu x)}{(-\eta \mu x) \cdot \sigma v v x \cdot (-\varepsilon \varphi x)} = 1$$

**B2.**

$$f(x) = 6\eta \mu 2x$$

$$\text{αφού } -1 \leq \eta \mu 2x \leq 1$$

$$-6 \leq 6\eta \mu 2x \leq 6$$

Μέγιστη Τιμή: 6

$$\text{Περίοδος: } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

**B3.**

$$f(x) = 3$$

$$6\eta \mu 2x = 3$$

$$\eta \mu 2x = \frac{1}{2}$$

$$\eta \mu 2x = \eta \mu \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \quad x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l|l} x \in [-\pi, \pi] & x \in [-\pi, \pi] \\ -\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \leq \pi & -\pi \leq \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \leq \pi \end{array}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\begin{aligned} -\frac{13\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{12} \\ -\frac{13}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0 \\ \kappa = -1 \text{ τότε } x = -\frac{11\pi}{12} \\ \kappa = 0 \text{ τότε } x = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{17\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{12} \\ -\frac{17}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0 \\ \kappa = -1 \text{ τότε } x = -\frac{7\pi}{12} \\ \kappa = 0 \text{ τότε } x = \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

B4.

$$(1 + \eta\mu x)(2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma v v x)(6\eta\mu 2x + 6\sigma v v 2x) = 0$$

$$\text{Τότε } 1 + \eta\mu x = 0$$

$$\eta\mu x = -1$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή το } 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma v v x = 0$$

$$\sigma v v x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma v v x = \sigma v v \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ή το } 6\eta\mu 2x + 6\sigma v v 2x = 0$$

$$6\eta\mu 2x = -6\sigma v v 2x$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$$

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - 2x \quad \text{ή} \quad 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + 2x: \text{αδύνατη}$$

$$x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

**ΘΕΜΑ Γ'**

Γ1.

A' ΤΡΟΠΟΣ

Έστω  $y = ax + \beta$

Το σημείο A(0,6) ανήκει στην ευθεία, άρα  $6 = \beta$

Το σημείο B(-2,0) ανήκει στην ευθεία οπότε

$$0 = -2a + 6$$

$$a = 3$$

B' ΤΡΟΠΟΣ

Χρησιμοποιώ τον τύπο:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{-2 - 0} = 3$$

και η εξίσωση θα είναι:

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = 3(x + 2)$$

$$y = 3x + 6$$

Γ2. Λύνω την εξίσωση  $f(x) = y$

$$x^4 - x^3 + x^2 = 3x + 6$$

$$x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{rrrrr|c}
 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & 2 \\
 \downarrow & 2 & 2 & 6 & 6 & \\
 1 & 1 & 3 & 3 & 0 &
 \end{array}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$(x - 2) \cdot (x^3 + x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ \downarrow & & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 3) = 0$$

$x = 2$  ή  $x = -1$  ή  $x^2 = -3$  αδύνατη

Για  $x = 2$ ,  $y = 12$  και για  $x = -1$ ,  $y = -9$   
Επομένως τα σημεία τομής είναι τα  $A(2, 12)$   $B(-1, -9)$

- Γ3. Για να ορίζεται η  $h(x)$  αρκεί  $f(x) > 3x + 6$

1ος Τρόπος Αλγεβρικά

Γνωρίζω ότι:  $f(x) - y = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 3)$

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	+	
$x + 1$	-	+		+
$x^2 + 3$	+	+		+
γινόμενο	+	0	-	+

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h$  είναι:

$$A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

2ος Τρόπος Γραφικά

Παρατηρώ από το σχήμα ότι η Cf είναι “πάνω” από την ευθεία  $(\varepsilon)$  όταν  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  αρα  $A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(a)

Γ4. i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$f(x): (x - 1)\varepsilon\nuαι \nu = f(1) \quad \text{και} \quad Q(x): (x - 1)\varepsilon\nuαι \nu = Q(1)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f(1) &= Q(1) \\ 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

ii)  $\frac{x^4 - x^3 + x^2}{-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2)(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1) \geq 0 \quad (1)$

$$\frac{\pi\rhoέπει - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1}{1 - x^4 + x^2 + 1} = \frac{-x^4 + x^2 + 2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow$$

Άρα  $(1 - x^2)(1 + x^2) + x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (2 - x^2)(1 + x^2) \neq 0$

Οπότε  $1 + x^2 \neq 0$  που ισχύει για κάθε  $x \in R$  και  $2 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

Επίσης

$$x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1)$$

Άρα η (1) γίνεται:  $x^2(x^2 - x + 1) \frac{(1+x^2)(2-x^2)}{2} \geq 0$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0 \text{ άρα αδύνατη.}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2$	+	+	0	+	+
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$2 - x^2$	-	+	+	+	-
Γινόμενο	-	+	0	+	-

Άρα,  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(a)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Πρέπει  $e^x + 3 - 4e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x + 3 - \frac{4}{e^x} > 0$

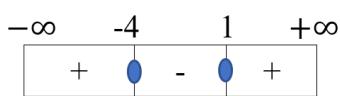
$$\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x} > 0$$

Επειδή  $e^x > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε  $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$

Θέτω  $e^x = \omega$ ,  $\omega > 0$ , ára έχουμε  $\omega^2 + 3\omega - 4 > 0$ .

Οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης  $\omega^2 + 3\omega - 4 = 0$  είναι

$\omega_1 = -4$  και  $\omega_2 = 1$ .



Άρα  $\omega < -4$  απορρίπτεται,  $\omega > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα  $Af = (0, +\infty)$

Δ2.  $f(x) = \ln(e^x + 3 - 4e^{-x}) = \ln\left(e^x + 3 - \frac{4}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x}\right) =$   
 ~~$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - \ln e^x$~~   $= \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x, x > 0$

Δ3.  $f(x) \leq x$ , για  $x > 0$  (1) έχουμε :

$$\begin{aligned} \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x &\leq x \Leftrightarrow \\ \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) &\leq 2x \Leftrightarrow \\ \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) &\leq \ln e^{2x} \Leftrightarrow \\ e^{2x} + 3e^x - 4 &\leq e^{2x} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$3e^x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \leq \ln \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\left(\frac{4}{3} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{4}{3} > 0\right)$$

Από (1) και (2) έχουμε  $0 < x \leq \ln \frac{4}{3}$

Δ4.

- $f(\ln 2) = \ln\left(e^{\ln 2} + 3 - \frac{4}{e^{\ln 2}}\right) = \ln\left(2 + 3 - \frac{4}{2}\right) = \ln 3$

- $f(\ln 3) = \ln\left(e^{\ln 3} + 3 - \frac{4}{e^{\ln 3}}\right) = \ln\left(3 + 3 - \frac{4}{3}\right) = \ln \frac{14}{3}$

Επειδή  $\frac{14}{3} > 3 \Leftrightarrow \ln \frac{14}{3} > \ln 3 \Leftrightarrow$

$$f(\ln 2) - f(\ln 3) < 0$$