

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Αν G μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$

Μονάδες 7

A2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός

<<Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .>>

Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

(α) Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής

Μονάδες 1

(β) Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α)

Μονάδες 3

A3. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$
- $f(0) = 3$ και $f(1) = -2$
- Η γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$

Τότε:

- (α) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0,1)$
- (β) Η εφαπτομένη της C_f σε κάποιο σημείο της $M(x_0, f(x_0)), x_0 \in (0,1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -5x + 2019$
- (γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \pi$
- (δ) Η ελάχιστη τιμή της f είναι το -2 και η μέγιστη το 3

Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι ψευδής;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση που ακολουθεί είναι λανθασμένη.

(α) Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

(β) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

(γ) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0) = 0$

(δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(ε) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$

B1 Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 2)$, $A_2 = (2, +\infty)$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τις ασύμπτωτές της f και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f την οριζόντια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 3$ και $x = 5$

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = a^{x-1}, a > 1, x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(x+1), x > -1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$ η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f

Γ1. (α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή (3 μονάδες) και ότι $a = e$ (3 μονάδες)

Μονάδες 6

(β) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη και ότι η $y = x$ και εφάπτεται στην C_g στο $x = 0$

Μονάδες 2

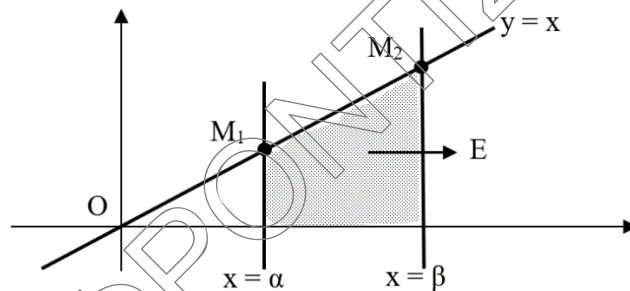
Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{x-1} - (x+1)\ln(x+1) + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (-1, +\infty)$ και στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση $e^{e^x} - e(e^x + 1)\ln(e^x + 1) + e^{e^x} > e^{e^x} - e(e^{e^x} + 1)\ln(e^{e^x} + 1) + e^{e^2x}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \int_0^1 x f(t^2) dt = \int_0^{e-1} g(t) dt$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 5

Γ4. Δύο σημεία $M_1(\alpha, \alpha), M_2(\beta, \beta)$ της ευθείας $\varepsilon: y = x$ ξεκινούν την χρονική στιγμή $t = 0$ και κινούνται σε αυτή έτσι ώστε: $\alpha'(t) = 2 \text{ cm/s}$, $\beta'(t) = 1 \text{ cm/s}$ και $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 3$ με $t \in [0, 3]$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να δείξετε $\alpha(t) = 2t$, $\beta(t) = t + 3$ και να βρεθεί η χρονική στιγμή t όπου το εμβαδόν χωρίου E που περικλείεται από την $y = x$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ μηδενίζεται καθώς και τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , έχει σύνολο τιμών

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \text{ και ισχύει: } f(x) = \begin{cases} e^{x-f(x)} & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{x \ln x}{x-1} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3Θ0(ε)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $2x \ln x \leq x^2 - 1$ για κάθε $x \geq 1$ και να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση g για την οποία ισχύει $0 \leq g(x) \leq (f(x) - 2019)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι ισχύει: $\int_0^1 \frac{4x^3 f(x^2)}{(f(x^2) + 1)^3} dx = 2f(0) - 1$

Μονάδες 5