



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 4 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Βιβλίο, 3.1 παράγραφος

Α.2.

α. Σ

β. Λ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Λ

Α.3. α. Ψ

β. Για τα διανύσματα $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$ ισχύει $|\vec{i}| = |\vec{j}|$, όμως $\vec{i} \neq \vec{j}$

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της γ_1 .

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = y - 3 \Rightarrow y = x + 2$$

Οπότε η γραμμή γ_1 είναι ευθεία με εξίσωση $\gamma_1 : y = x + 2$.

B.2. Αφού $\vec{v} // \gamma_2$, θα ισχύει:

$$\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\vec{v}} \Rightarrow \lambda_{\gamma_2} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \lambda_{\gamma_2} = -1.$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $I(-2, -2)$ είναι:

$$\gamma_2 : y + 2 = -1(x + 2) \Leftrightarrow \gamma_2 : y = -x + 4$$

B.3. Το αεροπλάνο που κινείται στην ευθεία γ_1 θα περάσει πιο κοντά από το αεροδρόμιο Αθηνών διότι $d(O, \gamma_1) < d(O, \gamma_2)$:

$$d(O, \gamma_1) = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d(O, \gamma_2) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

B.4. Σημείο τομής των ευθειών γ_1, γ_2 :

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής είναι το $N(-3, -1)$.

Είναι $\vec{ON} = (-3, -1)$ και $\vec{OI} = (-2, -2)$ και

$$\det(\vec{OI}, \vec{ON}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

οπότε το εμβαδόν είναι

$$(ION) = \frac{|\det(\vec{OI}, \vec{ON})|}{2} = 2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} + \vec{\beta})(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta} &= 2 \\ \vec{\alpha}\vec{\beta} &= 1 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = \frac{\pi}{3}.$$

Γ.2

Έχουμε

$$2p = 2\vec{\beta}(\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}) = 2\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 8 - 4 = 4$$

Οπότε

$$p = 2 \text{ και } C_1 : y^2 = 4x$$

$$\text{Άρα } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{2}{2}, 0\right) = (1, 0) \text{ και } (\delta): x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - |\vec{\beta}|(x + 4\vec{\alpha}\vec{\beta}y) + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(x + 4y) - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$-\frac{A}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ και } -\frac{B}{2} = -\frac{-8}{2} = 4$$

άρα $K(1,4)$.

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \sqrt{2}$$

Γ.3.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $A(1,2)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): 2y = 2(x+1) \Leftrightarrow y = x+1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

Για να εφάπτεται η ευθεία ε στον κύκλο C_2 αρκεί να ισχύει:

$$d(K, \varepsilon) = \rho.$$

Πράγματι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1 - 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \rho.$$

Γ.4.

$$(EK) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{0+16} = 4 > \sqrt{2} = \rho$$

συνεπώς το σημείο E είναι εξωτερικό του C_2 .

Η μέγιστη απόσταση του E από τον C_2 ισούται με

$$d_{\max} = (EK) + \rho = 4 + \sqrt{2}$$

και η ελάχιστη απόσταση του E από τον C_2 ισούται με

$$d_{\min} = (EK) - \rho = 4 - \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Αναγκαία συνθήκη είναι

$$\begin{aligned}\lambda^4 + \lambda^2 &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 1) &= -\lambda(\lambda^2 + 1) + 2(\lambda^2 + 1) \\ \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) &= 0 \\ \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 1\end{aligned}$$

Για $\lambda = -2$, η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}20x^2 + 20y^2 + 60x - 40y + 320 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 2y + 16 &= 0\end{aligned}$$

Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = -51 < 0$$

οπότε δεν παριστάνει κύκλο.

Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}2x^2 + 2y^2 - 12x - 16y + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 &= 0\end{aligned}$$

Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 > 0$$

οπότε παριστάνει κύκλο C

Δ.2. Για $\lambda = 1$, είναι: $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ α. Κέντρο $\Theta(3,4)$ και ακτίνα $\rho = 3$.β. Είναι $d(\Theta, \eta) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 8$

Επομένως για την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση, αντίστοιχα έχουμε:

$$d_{\min} = d(\Theta, \eta) - \rho = 8 - 3 = 5$$

και: $d_{\max} = d(\Theta, \eta) + \rho = 8 + 3 = 11$

γ. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι:

$$\varepsilon_1 : x = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$$

Είναι:

$$d(\Theta, \varepsilon_1) = \frac{|3+0+0|}{\sqrt{1+0}} = 3 = \rho$$

Επομένως η $\varepsilon_1 : x = 0$ είναι μια εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Είναι:

$$d(\Theta, \varepsilon_2) = \frac{|3\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Αναγκαία συνθήκη είναι:

$$\begin{aligned} d(\Theta, \varepsilon_2) &= \rho \\ \Leftrightarrow |3\lambda - 4| &= 3\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

Επομένως η $\varepsilon_2 : y = \frac{7}{24}x$ είναι μια εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Επειδή $ΚΛ = 6 = 2\rho$, η ΚΛ θα είναι διάμετρος του κύκλου.

Οπότε το μέσο της ΚΛ θα είναι το κέντρο Θ του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$.

Επομένως η ΟΘ διάμεσος του τριγώνου ΟΚΛ.

Άρα

$$|\overline{OK} + \overline{OL}| = |2\overline{O\Theta}| = 2\sqrt{3^2 + 4^2} = 10$$