ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 90

Α2. **α.** $(\alpha \to 1)$ **β.** $(\beta \to 3)$ **γ.** $(\gamma \to 2)$ **δ.** $(\delta \to 5)$

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α. $\alpha = \sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{3}}$

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{12}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{12}+\sqrt{3})}$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\alpha = \sqrt{12-3}$$

$$\alpha = \sqrt{9}$$

$$\alpha = 3$$

β. $\beta = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{27}}$

$\beta = \sqrt{\frac{2}{2} + 3}$

$\beta = \sqrt{1+3}$

$\beta = \sqrt{4}$

$\beta = 2$

Β2. α. $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$ άρα $x_1 = 2$ ή $x_2 = 1$

β. Έχουμε $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 2$

Συνεπώς $d(x, \rho_1) = \rho_2$

$|x - 1| = 2$

$x - 1 = 2$ ή $x - 1 = -2$

$x = 3$ ή $x = -1$

Β3. $x^2 - x - 2 < 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$ άρα $x_1 = 2$ ή $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

$x \in (-1, 2)$

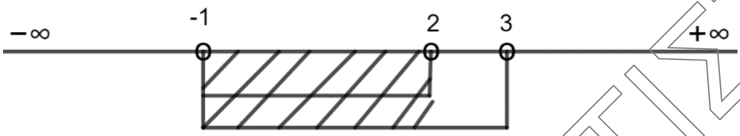
Επίσης έχουμε $|x-1|<2$

$-2<x-1<2$

$-2+1<x-1+1<2+1$

$-1<x<3$

Επομένως οι κοινές λύσεις είναι



$x \in (-1,2)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α. $x^2-(\alpha+1)x+2\alpha-1=0$

$\Delta=[-(\alpha+1)]^2-4\cdot 1\cdot(2\alpha-1)$

$\Delta=(\alpha+1)^2-4(2\alpha-1)$

$\Delta=\alpha^2+2\alpha+1-8\alpha+4$

$\Delta=\alpha^2-6\alpha+5$

Γ2. Έχουμε $\alpha^2-6\alpha+5=0$

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16$

$\alpha_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}$ άρα $\alpha_1=1$ $\alpha_2=5$

α	$-\infty$		1		5		$+\infty$
α²-6α+5		+	0	−	0	+	

Παρατηρούμε ότι όταν $\alpha \in (1,5)$ η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική συνεπώς το τριώνυμο διατηρεί πρόσημό ομόσημο του 1.

Άρα όταν $\alpha \in (1,5)$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες αντίθετες θα πρέπει:

$\Delta \succ 0$ δηλαδή $\alpha \in (-\infty,1) \cup (5,+\infty)$ και επίσης

$S = 0$

$-\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\frac{-[-(\alpha+1)]}{1} = 0$

$\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -1$

Αν $\alpha = -1$ τότε το τριώνυμο γίνεται

$f(x) = x^2 - (-1+1)x + 2\cdot(-1) - 1$

$f(x) = x^2 - 3$

Οπότε $f(x) = 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

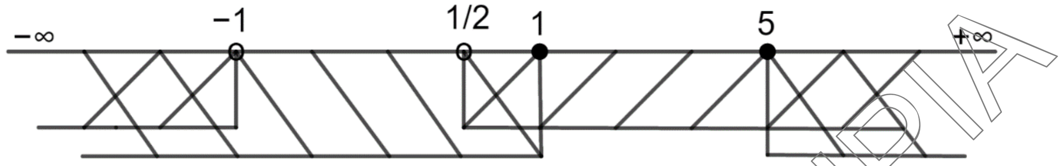
$x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$

Γ4. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές θα πρέπει

$\Delta \geq 0$ δηλαδή $\alpha \in (-\infty, 1] \cup [5,+\infty)$ και επίσης

$S < 0$	και	$P > 0$
$-\frac{\beta}{\alpha} < 0$		$\frac{\gamma}{\alpha} > 0$
$\frac{-[-(\alpha+1)]}{1} < 0$		$\frac{2\alpha-1}{1} > 0$
$\alpha + 1 < 0$		$2\alpha - 1 > 0$
$\alpha < -1$		$2\alpha > 1$
		$\alpha > \frac{1}{2}$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν κοινές λύσεις



οπότε δεν υπάρχουν τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πρέπει $x \neq 0$ και $x^2 \neq 0$

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

Οπότε η f ορίζεται στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$ έχουμε:

$$f(1) = 1$$

$$1 - \frac{\mu}{1} + \frac{4}{1^2} = 1$$

$$1 - \mu + 4 = 1$$

$$-\mu + 5 = 1$$

$$-\mu = -4$$

$$\mu = 4$$

Δ2. Έχουμε $f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

Ακόμα $|x| \cdot \sqrt{f(x)} = 2$

$$|x| \cdot \sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2} = 2$$

$$|x| \cdot \frac{|x-2|}{|x|} = 2$$

$|x-2| = 2$

$x-2=2$ ή $x-2=-2$

$x=4$ ή $x=0$ (Απορρίπτεται)

Δ3. Έχουμε $f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$

Επομένως $f(1) = \left(\frac{1-2}{1}\right)^2 = \left(\frac{-1}{1}\right)^2 = (-1)^2 = 1$

$$f(-1) = \left(\frac{-1-2}{-1}\right)^2 = \left(\frac{-3}{-1}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Άρα η ευθεία (ε) γίνεται $y = x + 9$

Θέτουμε $y = 0$ άρα $x = -9$ συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-9{,}0)$

Θέτουμε $x = 0$ άρα $y = 9$ συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0{,}9)$

Δ4. Το συμμετρικό του $M(1{,}1)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $M_1(1\,,-1)$

Επειδή η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη με την (ε): $y = x + 9$ θα έχει την ίδια κλίση με αυτή οπότε θα είναι $\alpha = 1$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία (ζ) θα είναι της μορφής $y = x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $M_1(1\,,-1)$ θα ισχύει $-1 = 1 + \beta$ οπότε θα έχουμε $\beta = -2$.

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι (ζ): $y = x - 2$