ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

- Να αποδείξετε ότι: όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- Να αποδείξετε ότι: κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$

Μονάδες 8

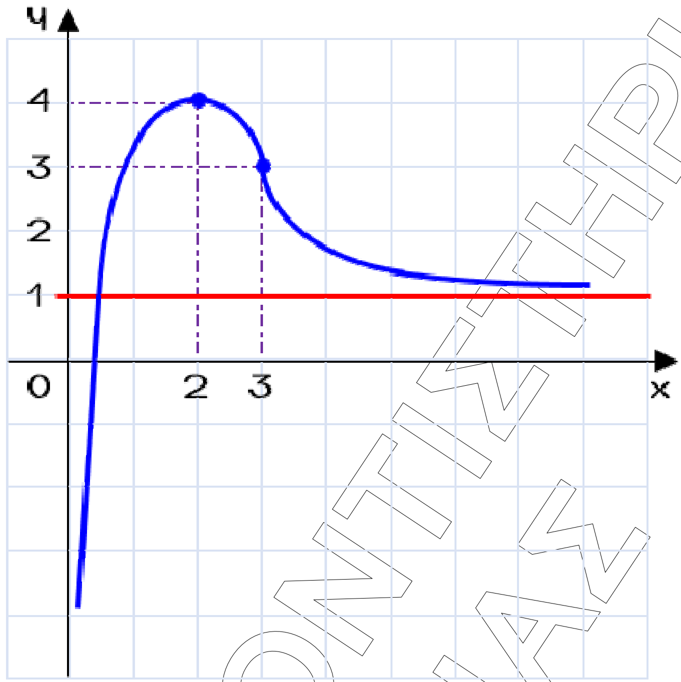
Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1.

Μονάδες 3

Α4 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.
Με βάση το σχήμα να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.



(α) Για $x=2$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(2)=4$

(β) Η ευθεία y = 1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(γ) Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,2]$

(δ) Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει το πολύ δύο ρίζες για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

(ε) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x)-1)\right]=-\infty$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1$ με $A_f=\mathbb{R}$

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=\ln(x+1), x>-1$$

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f^{-1} ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι η κοινή τους εφαπτομένη στο $O(0,0)$

Μονάδες 8

Β3. **(i)** Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x > -1$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) + \eta\mu x$ στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 6

Β4. Αν G μια παράγουσα της συνάρτησης $g(x) = f(x) + f^{-1}(x), x > 0$ να δείξετε ότι για $0 < \alpha < \beta$ ισχύει: $(\beta - \alpha) \cdot g(\alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < (\beta - \alpha) \cdot g(\beta)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = k - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ με τιμή $1 - \ln 2$

Γ1. Δείξτε ότι $k = 1$ και ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$

Μονάδες 4

Γ2. **(i)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 4

(ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2) \text{ με } x > 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 3

Γ3. **(i)** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$

Μονάδες 3

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + \ln x + 2$ την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

$$\bullet\ f'(1)\neq -1 \text{ και } f(1)=1$$

$$\bullet\ f\left(f^2(x)\right)+f^2(x)=f(x)+x \text{ για κάθε } x>0$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι για την συνάρτηση g με

$$g(x)=\begin{cases}\left(\int_1^2 f(t)\,dt\right)\cdot x^3, & x\geq 0\\ \left(\int_2^3 f(t-1)\,dt\right)\cdot x^2, & x<0\end{cases}$$

ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta=[-1,1]$

Μονάδες 8

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f\left(x^2+1\right)$, με $x>0$

Δ3. Να δείξετε ότι: $\int_2^3 h(x)\,dx>\int_1^2 h(x)\,dx$

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\left(\int_2^3\left(h(t)\cdot\int_2^3 h(u)\,du\right)dt\right)\cdot(x-2)+f(x)\left(\int_1^2 h(t)\,dt\right)^2=0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

Μονάδες 4