ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΦΥΣΙΚΗ**

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 12 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α

Α2. β

Α3. γ

Α4. δ

Α5. **α.** Λάθος

β. Σωστό

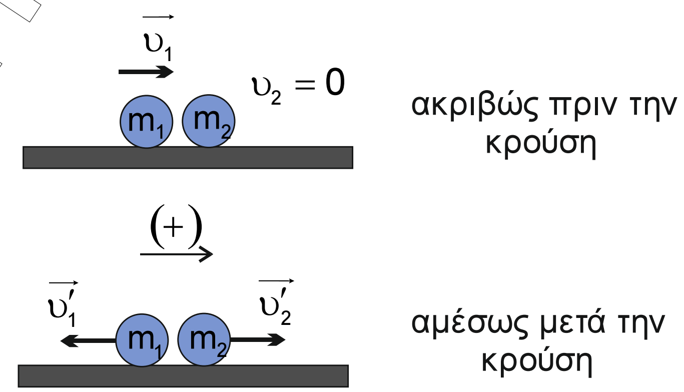
γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή **α**



Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (Σ_1) αμέσως μετά την κρούση μειώνεται κατά 20%. Συνεπώς θα είναι ίσο με:

$$|\upsilon_1'| = \upsilon_1 - 0,2 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow |\upsilon_1'| = 0,8\,\upsilon_1 .$$

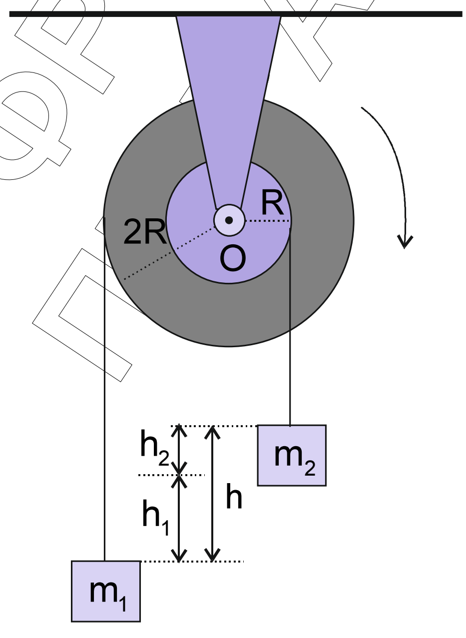
Επειδή η σφαίρα (Σ_1) εξαιτίας της κρούσης αλλάζει φορά κίνησης έχουμε ότι $\upsilon_1' = -0,8\,\upsilon_1 \; (1)$

<u>Εξισώσεις κεντρικής ελαστικής κρούσης</u>

- $$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} -0,8\,\cancel{\upsilon_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cancel{\upsilon_1} \Rightarrow -0,8\,m_1 - 0,8\,m_2 = m_1 - m_2 \Rightarrow$$
$$m_2 = 9m_1 \; (2)$$

- $$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 9m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = 0,2\upsilon_1}$$

Β2. Σωστή επιλογή **β**



Αρχικά θα στραφούν και οι δύο κατά γωνία θ.

Η τροχαλία ακτίνας R θα διαγράψει σε χρόνο t τόξο $s_2 = h_2 = R \cdot \theta \; (1)$

Η τροχαλία ακτίνας 2R θα διαγράψει σε χρόνο t τόξο $s_1 = h_1 = 2R \cdot \theta \; (2)$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{2\cancel{R\cdot\theta}}{\cancel{R\cdot\theta}} = 2 \Rightarrow h_1 = 2h_2 \;(3)$$

Τα δύο σώματα θα βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο όταν:

$$h_1 + h_2 = h \overset{(3)}{\Rightarrow} 2h_2 + h_2 = h \Rightarrow \boxed{h_2 = \frac{h}{3}}$$

Β3. Σωστή επιλογή **γ**

Ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται από την πηγή S_1 ήχο συχνότητας $f_{A(s_1)} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \;(1)$ και από την πηγή S_2 ήχο συχνότητας $f_{A(s_2)} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \;(2)$.

Η συχνότητα μεγιστοποίησης του σύνθετου ήχου που αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος (συχνότητα διακροτήματος) είναι ίση με:

$$f_\delta = \left|f_{A(s_1)} - f_{A(s_2)}\right| \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \frac{\cancel{f_s}}{100} = \left|\frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A - (\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A)}{\upsilon_{\eta\chi}}\cancel{f_s}\right| \Rightarrow \frac{1}{100} = \left|\frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A - \upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{100} = \left|-2\upsilon_A\right| \Rightarrow \boxed{\upsilon_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{200}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η παροχή της βρύσης είναι ίση με:

$$\Pi = A\cdot\upsilon_0 = 10^{-3}\cdot 0,5\frac{m^3}{s} \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s}$$

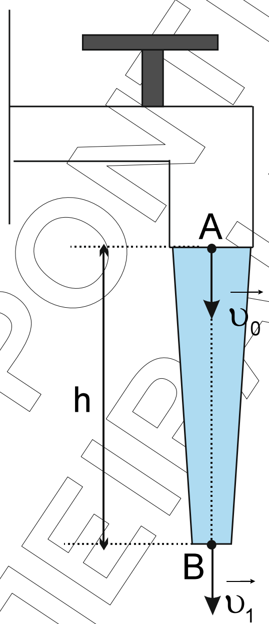
Όμως από τον ορισμό της παροχής έχουμε ότι:

$$\Pi = \frac{V_\delta}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{V_\delta}{\Pi} \Rightarrow \Delta t = \frac{72\cdot 10^{-3}}{\frac{1}{2}10^{-3}}s \Rightarrow \boxed{\Delta t = 144\,s}$$

Γ2. Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας για τη φλέβα του νερού, από τη στιγμή που εξέρχεται από τη βρύση (σημείο Α) μέχρι να υποτριπλασιαστεί το εμβαδόν διατομής της (σημείο Β).

$$\Pi_A = \Pi_B \Rightarrow \cancel{A} \cdot \upsilon_0 = \frac{\cancel{A}}{3} \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 1,5\frac{m}{s}$$

Τα σημεία Α και Β βρίσκονται κατά μήκος της ίδιας ρευματικής γραμμής και η πίεση τους είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση, διότι στο σημείο Α το νερό έχει μόλις εξέλθει στον αέρα και στο σημείο Β βρίσκεται στον αέρα. Συνεπώς $p_A = p_B = p_{atm}$.



Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Α και Β.

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 + \rho g h = p_B + \frac{1}{2}\rho\,\upsilon_B^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{p_{atm}} + \frac{1}{2}\cancel{\rho}\,\upsilon_0^2 + \cancel{\rho}\,g\,h = \cancel{p_{atm}} + \frac{1}{2}\cancel{\rho}\,\upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + 10h = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4} \Rightarrow 10h = \frac{8}{8} \Rightarrow \boxed{h = 0,1\,m}$$

Γ3. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού θα σταθεροποιηθεί όταν η ποσότητα του νερού που εισέρχεται στο δοχείο ανά μονάδα χρόνου είναι ίση με την ποσότητα του νερού που εξέρχεται από την τρύπα ανά μονάδα χρόνου. Δηλαδή πρέπει

$$\Pi_{εισερχ} = \Pi_{εξερχ} \Rightarrow \Pi = A_T \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = \frac{1}{2}10^{-3}\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = 1\frac{m}{s}}$$

Γ4. Ο όγκος του κυλινδρικού δοχείου είναι ίσος με:

$$V_s = A_\delta H \Rightarrow 72\cdot 10^{-3} = 6\cdot 10^{-2}\cdot H \Rightarrow 2,4 = 2H \Rightarrow H = 1,2m$$

Συνεπώς όταν το δοχείο είναι γεμάτο η ελεύθερη επιφάνεια του νερού απέχει κατακόρυφη απόσταση Η από τη βάση του δοχείου.
Έστω ότι η οπή βρίσκεται χαμηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού κατά y. Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και του σημείου εξόδου του νερού από την οπή.

$$p_{atm} + \rho g y = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gy}$$

(Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού παραμένει στο ίδιο ύψος.)
Η φλέβα του εξερχόμενου νερού εκτελεί οριζόντια βολή με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \sqrt{2gy}$.

Το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι ίσο με: $s = \upsilon\cdot t \Leftrightarrow t = \frac{s}{\upsilon}$.

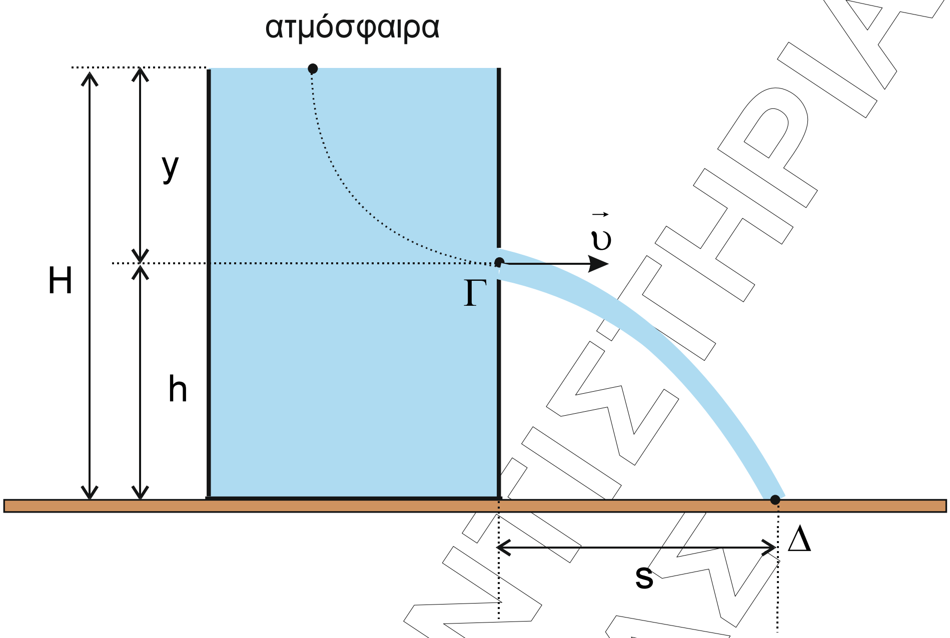
Η φλέβα του νερού θα φτάσει στο έδαφος όταν:

$$H - y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{s}{\upsilon}\right)^2 \Rightarrow H - y = \frac{1}{2}g\frac{s^2}{2gy} \Rightarrow \boxed{4y^2 - 4Hy + s^2 = 0}$$

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ (δευτεροβάθμια εξίσωση)}$$

$$\text{Διακρίνουσα... } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16H^2 - 16s^2$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις πρέπει $\Delta \geq 0 \Rightarrow 16H^2 \geq 16s^2 \Rightarrow H \geq s$
Οπότε το μέγιστο βεληνεκές είναι ίσο με $s_{max} = H$ και η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι: $y = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{4H}{8} = \frac{H}{2}$.
Δηλαδή η οπή πρέπει να ανοιχτεί στο μέσο του ύψους Η της ελεύθερης επιφάνειας του νερού, δηλαδή σε ύψος $h = \frac{H}{2} = 0,6m$ από τη βάση του δοχείου.



(Το μέγιστο βεληνεκές ισούται με το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του νερού.)

Το μέτρο της ταχύτητας του νερού όταν εξέρχεται από την οπή είναι ίσο με:

$$\upsilon = \sqrt{2g\frac{H}{2}} = \sqrt{12}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τη φλέβα του νερού από το σημείο Γ (οπή) μέχρι το σημείο Δ (σημείο πρόσκρουσης της φλέβας του νερού στο έδαφος). Τα σημεία Γ και Δ βρίσκονται κατά μήκος της ίδια ρευματικής γραμμής.

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g\frac{H}{2} = p_\Delta + \frac{dK}{dV} + 0 \Rightarrow \cancel{p_{atm}} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g\frac{H}{2} = \cancel{p_{atm}} + \frac{dK}{dV} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dV} = \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot 12 + 10\cdot 10^3\cdot 0,6 \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dV} = 12\cdot 10^3\,\frac{J}{m^3}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε θεώρημα Steiner για κάθε ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής της δοκού.

Ράβδος (ΑΖ):

$$I_{\rho_1} = I_{cm} + m_1\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{\rho_1} = \frac{1}{3}m_1 \cdot L_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 9\cdot 0,8^2 \Rightarrow I_{\rho_1} = 1,92\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

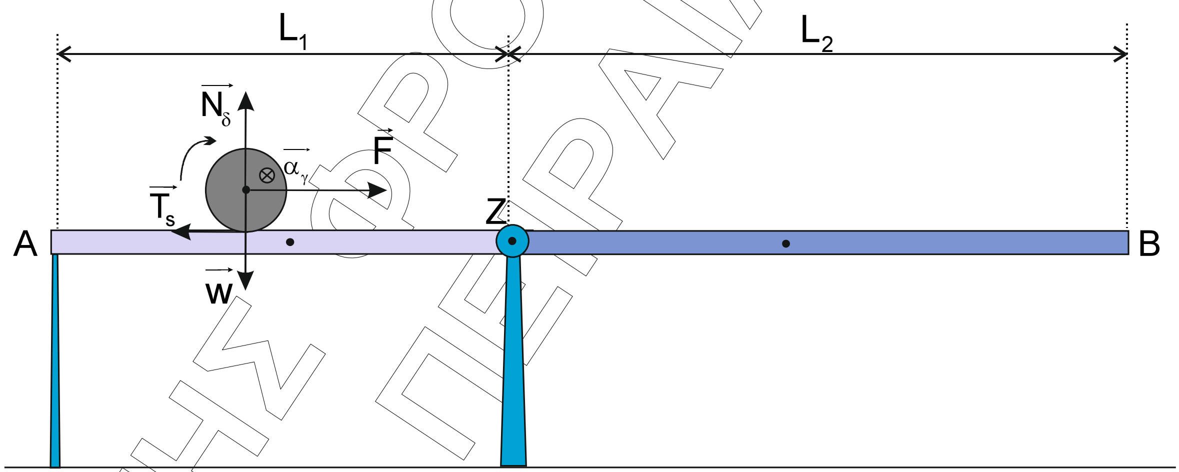
Ράβδος (ΖΒ):

$$I_{\rho_2} = I_{cm} + m_2\left(\frac{L_2}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{\rho_2} = \frac{1}{3}m_2 \cdot L_2^2 = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1,1^2 \Rightarrow I_{\rho_2} = 1,21\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίση με:

$$I_\delta = I_{\rho_1} + I_{\rho_2} \Rightarrow \boxed{I_\delta = 3,13\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Δ2.



Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του δίσκου πάνω στο τμήμα (AZ) της δοκού.

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow F - T_s = m\,\alpha_{cm}\ (1)$

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow T_s\cdot \cancel{R} = \frac{1}{2}m\,\cancel{R^2}\frac{\alpha_{cm}}{\cancel{R}} \Rightarrow T_s = \frac{1}{2}m\,\alpha_{cm}\ (2)$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (2) στη σχέση (1) και έχουμε ότι:

$$F - \frac{m\,\alpha_{cm}}{2} = m\,\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2F}{3m} = \frac{2\cdot 0,6}{3\cdot 1} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = 0,4\frac{m}{s^2}}$$

Από τη σχέση (2) υπολογίζουμε το μέτρο της στατικής τριβής

$$T_S = \frac{m\cdot\alpha_{cm}}{2} = \frac{1\cdot 0,4}{2} = 0,2N$$

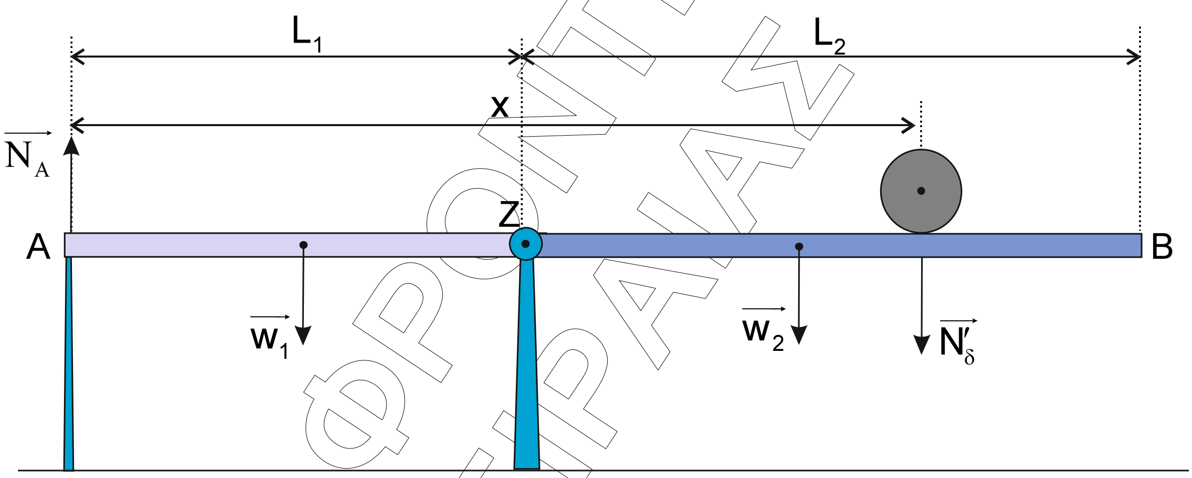
Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίσο με:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=T_S\cdot R\Rightarrow\boxed{\frac{dL}{dt}=10^{-2}\,\frac{kg\cdot m^2}{s^2}}$$

Δ3. Συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y′y για το δίσκο

$$\Sigma F_y=0\Rightarrow N_\delta-w=0\Rightarrow N_\delta=m\cdot g=10N$$

Σύμφωνα με τον 3ο Νόμο του Newton η δοκός, κατά τη διάρκεια της κίνησης του δίσκου πάνω σε αυτή, δέχεται κατακόρυφη δύναμη μέτρου $N'_\delta=N_\delta=10N$.



Αφού η δοκός ισορροπεί ισχύει $\Sigma\tau=0\,(3)$ ως προς οποιοδήποτε σημείο της. Εφαρμόζουμε τη σχέση (3) ως προς το σημείο Z και έχουμε ότι:

$$\Sigma\tau_{(Z)}=0\Rightarrow -N_A\cdot L_1+w_1\frac{L_1}{2}-w_2\frac{L_2}{2}-N'_\delta\left(x-L_1\right)=0\Rightarrow$$

$$N_A\cdot L_1=m_1 g\frac{L_1}{2}-m_2 g\frac{L_2}{2}-N'_\delta x+N'_\delta L_1\Rightarrow$$

$$N_A\cdot 0{,}8=9\cdot 10\cdot\frac{0{,}8}{2}-3\cdot 10\cdot\frac{1{,}1}{2}-10\cdot x+10\cdot 0{,}8\Rightarrow$$

$$0{,}8N_A=36-16{,}5-10x+8\Rightarrow\boxed{N_A=\frac{275-100x}{8}(S.I.)}\text{ για }\boxed{0\le x\le 1{,}9m}$$

Για να μην ανατραπεί η δοκός πρέπει $N_A\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1{,}9m]$.

$$N_A\ge 0\Rightarrow\frac{275-100x}{8}\ge 0\Leftrightarrow 100x\le 275\Rightarrow x\le 2{,}75m$$

Συνεπώς η δοκός δε θα χάσει την επαφή της με το υποστήριγμα και δεν θα ανατραπεί.

Δ4. Η κίνηση του δίσκου στο τμήμα (ΑΖ) της δοκού μπορεί να αναλυθεί σε μια ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση και σε μια ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Ο δίσκος θα φτάσει τη χρονική στιγμή t_1, έχοντας διανύσει απόσταση

$$s_1 = L_1 = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 \Rightarrow 0,8 = \frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot t_1^2 \Rightarrow \boxed{t_1 = 2sec}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\upsilon_1 = \alpha_{cm}\cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 0,8\frac{m}{sec}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_1}{R} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{0,8}{0,05} = 16\frac{rad}{s}}$$

Όταν ο δίσκος εισέρχεται στο λείο τμήμα (ΖΒ) της δοκού δεν υπάρχει η δύναμη της τριβής. Συνεπώς η κίνηση του δίσκου στο τμήμα (ΖΒ) της δοκού μπορεί να αναλυθεί σε μια ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση και σε μια ομαλή στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1.

<u>1ος τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση του δίσκου στο τμήμα (ΖΒ) της δοκού.

$$K^B_{μεταφ} + \cancel{K^B_{στροφ}} - K^Z_{μεταφ} - \cancel{K^Z_{στροφ}} = W_F + W_{N_δ} + W_w \Rightarrow$$

$$K^B_{μεταφ} - \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_1^2 = W_F + 0 + 0 \Rightarrow$$

$$K^B_{μεταφ} = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_1^2 + F\cdot L_2 \Rightarrow K^B_{μεταφ} = \frac{1}{2}1\cdot 0,64 + 0,6\cdot 1,1 \Rightarrow$$

$$K^B_{μεταφ} = K_{μεταφ} = 0,98J$$

Η περιστροφική κινητική ενέργεια του δίσκου παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης του στο τμήμα (ΖΒ) της δοκού και είναι ίση με:

$$K_{στροφ} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2 \Rightarrow K_{στροφ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 \Rightarrow$$

$$K_{στροφ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}1\cdot\frac{1}{400}256 \Rightarrow K_{στροφ} = 0,16J$$

Ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του δίσκου όταν βρεθεί στο άκρο Β της δοκού είναι ίσος με:

$$\frac{K_{μεταφ}}{K_{στροφ}}=\frac{0,98}{0,16}\Rightarrow \boxed{\frac{K_{μεταφ}}{K_{στροφ}}=\frac{49}{8}=6,125}$$

2^{ος} τρόπος

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του δίσκου πάνω στο τμήμα (ZB) της δοκού.

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m\alpha'_{cm} \Rightarrow F = m\alpha'_{cm} \Rightarrow \alpha'_{cm} = 0,6\frac{m}{s^2}$

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow 0 = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = 0$

Ο δίσκος θα φτάσει στο άκρο Β της δοκού έχοντας διανύσει απόσταση πάνω στο λείο τμήμα της:

$$s_2 = L_2 = \upsilon_1\Delta t + \frac{1}{2}\alpha'_{cm}\Delta t^2 \Rightarrow 1,1 = 0,8\Delta t + \frac{1}{2}0,6\Delta t^2 \Rightarrow$$

$$3\Delta t^2 + 8\Delta t - 11 = 0 \Rightarrow \Delta t = 1\,sec$$

Το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου όταν φτάνει στο άκρο Β της δοκού είναι ίσο με:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \alpha'_{cm}\Delta t = 0,8 + 0,6\cdot 2 \Rightarrow \upsilon_2 = 1,4\frac{m}{s}$$

Ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του δίσκου όταν βρεθεί στο άκρο Β της δοκού είναι ίσος με:

$$\frac{K_{μεταφ}}{K_{στροφ}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}m(\upsilon_2)^2}{\cancel{\frac{1}{2}}I_{cm}\omega_1^2}=\frac{\cancel{m}(\upsilon_2)^2}{\frac{1}{2}\cancel{m}R^2\omega_1^2}\Rightarrow \frac{K_{μεταφ}}{K_{στροφ}}=\frac{1,96}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{400}\cdot 256}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K_{μεταφ}}{K_{στροφ}}=\frac{49}{8}=6,125}$$

<u>Οι απαντήσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.</u>