ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 22 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα: 30.

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα: 16.

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα: 142.

Α4. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f(x)=\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x},\ x>0$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2},\quad x>0$$

Β2. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2}=\frac{1+1}{1}=2$

Β3. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2-1>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)>0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

Τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	0		1		$+\infty$
f΄(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖	↘		↗	

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση 1 ίσο με $f(1)=2$.

Β4. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)'=\frac{(x^2-1)'\cdot x^2-(x^2-1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

Επομένως,

$$\frac{f'(x)}{x}+\frac{f''(x)}{2}+x=\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{x}+\frac{\frac{2}{x^3}}{2}+x=\frac{x^2-1}{x^3}+\frac{1}{x^3}+x=\frac{x^2-\cancel{1}+\cancel{1}}{x^3}+x=\frac{1}{x}+x=\frac{x^2+1}{x}=f(x)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι, $\bar{x}_A=\dfrac{-3-5+3+1-3-5}{6}=\dfrac{-12}{6}=-2$

Για να βρούμε τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά

$$-5, -5, -3, -3, 1, 3$$

Επειδή έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων δηλαδή της $3^{ης}$ και της $4^{ης}$ παρατήρησης άρα,

$$\delta_A=\frac{-3-3}{2}=-3$$

Το εύρος βρίσκεται αφαιρώντας τη μικρότερη από τη μεγαλύτερη παρατήρηση. Δηλαδή,

$$R_A = 3 - (-5) = 8$$

Γ2. Αφού είναι $f_1 = 0,4$ και το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 20$ παίκτες τότε

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} \Leftrightarrow \nu_1 = f_1 \cdot \nu = 0,4 \cdot 20 = 8$$

Επίσης είναι $\nu_2 = \frac{3}{4} \cdot R_A = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ και $\nu_3 = \bar{x}_A^2 = (-2)^2 = 4$.

Το άθροισμα των συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος Α άρα:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 20 \Leftrightarrow \nu_4 = 20 - 8 - 6 - 4 = 2$$

Επομένως ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής,

Βαθμοί x_i	**Πλήθος παικτών** ν_i	**Σχετική συχνότητα** f_i
2	8	0,4
4	6	0,3
6	4	0,2
8	2	0,1
Σύνολο	20	1

Γ3. **i)** Η μέση τιμή υπολογίζεται από τον τύπο $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i$.

Για το άθροισμα $\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα,

Βαθμοί x_i	**Πλήθος παικτών** ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
2	8	16
4	6	24
6	4	24
8	2	16
Σύνολο	**20**	$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = 80$

Άρα $\bar{x}_B = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = \frac{80}{20} = 4$

ii) Για τον υπολογισμό της διαμέσου του άρτιου δείγματος Β βρίσκουμε τις αθροιστικές συχνότητες N_i

Βαθμοί x_i	**Πλήθος παικτών** ν_i	**Αθροιστική συχνότητα** $\mathbf{N_i}$
2	8	8
4	6	14
6	4	18
8	2	20
Σύνολο	**20**	

Αφού το πλήθος είναι άρτιο, είναι $\delta_B = \dfrac{t_{10} + t_{11}}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4$

iii) Με τη βοήθεια του πίνακα

Βαθμοί x_i	**Πλήθος παικτών** ν_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
2	8	-2	**4**	**32**
4	6	**0**	**0**	**0**
6	4	**2**	**4**	**16**
8	2	**4**	**16**	**32**
Σύνολο	**20**			**80**

βρίσκουμε ότι η διακύμανση ισούται με, $s_B^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i = \dfrac{80}{20} = 4$

Επομένως η τυπική απόκλιση του δείγματος Β ισούται με τη θετική ρίζα της διακύμανσης, δηλαδή είναι $s_B = 2$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος Β ισούται με, $CV_B = \dfrac{s_B}{\bar{x}_B} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

Άρα $CV_B = 50\% > 10\%$ που σημαίνει πως το δείγμα Β δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}\ \textbf{(1)}$$

$$P(B)=2P(A)\ \textbf{(2)}$$

και

$$P(A-B)=\frac{P(A\cap B)}{2}$$

Η τελευταία γίνεται:

$$P(A-B)=\frac{P(A\cap B)}{2}\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{P(A\cap B)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2P(A)=3P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(A)\ \textbf{(3)}$$

Από τον προσθετικό νόμο με τη βοήθεια των **(1)** **(2)** και **(3)** προκύπτει,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\overset{(1),(2),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}=P(A)+2P(A)-\frac{2}{3}P(A)$$

$$\Leftrightarrow 3=14P(A)\Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{14}$$

άρα

$$(2)\Leftrightarrow P(B)=2P(A)=2\cdot\frac{3}{14}=\frac{3}{7}$$

Δ2. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων $(A\cup B)'$ και $B\cap A'$ έχουμε:

i) $P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow P\left[(A\cup B)'\right]=\frac{1}{2}$

ii) $P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-\frac{2}{3}P(A)=\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\frac{3}{14}=\frac{2}{7}$

iii) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A\cap B)'$

Άρα η πιθανότητα του ισούται με:

$$P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

Δ3. Είναι $P(A)=\frac{3}{14}$, $P(B)=\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$,$P(A\cap B)=\frac{1}{7}=\frac{2}{14}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}=\frac{7}{14}$

Είναι:

$$P(A\cap B)<P(A)<P(B)<P(A\cup B)$$
$$\Leftrightarrow \frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}<\frac{N(A)}{N(\Omega)}<\frac{N(B)}{N(\Omega)}<\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}$$
$$\Leftrightarrow N(A\cap B)<N(A)<N(B)<N(A\cup B)$$

και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει ότι:

$$f\left(N(A\cap B)\right)>f\left(N(A)\right)>f\left(N(B)\right)>f\left(N(A\cup B)\right)$$