

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.**
1. Αθροιστική συχνότητα N_i , είναι η συχνότητα που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
 2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = c$. Έχουμε: $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$. Επομένως: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.
- A2.**
1. Σωστό.
 2. Λάθος.
 3. Λάθος.
 4. Σωστό.
 5. Λάθος.
- A3.**
1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell^v$
 2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
 3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 4. Σε μια κανονική κατανομή, στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

ΘΕΜΑ Β

Κλάσεις	x_i (κέντρο κλάσης)	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i (x_i - \bar{x})^2$
[0,20)	10	1	1	0,05	0,05	10	-40	1600	1600
[20,40)	30	8	9	0,40	0,45	240	-20	400	3200
[40,60)	50	4	13	0,20	0,65	200	0	0	0
[60,80)	70	4	17	0,20	0,85	280	20	400	1600
[80,100)	90	3	20	0,15	1,00	270	40	1600	4800
Σύνολα	-----	20	-----	1,00	-----	1000	-----	-----	11200

B1. $f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_3}{f_3} = \frac{4}{0,2} = \frac{40}{2} \Leftrightarrow v = 20.$

B2. $x_1 = \frac{0+20}{2} = \frac{20}{2} = 10.$ Ομοίως και τα υπόλοιπα.

$v_1 = f_1 \cdot v = 0,05 \cdot 20 = 1$

$v_2 = N_2 - N_1 = 9 - 1 = 8$

$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{20} = 0,40$

$f_4 = F_4 - F_3 = 0,85 - 0,65 = 0,20$

$v_5 = N_5 - N_4 = 20 - 17 = 3$

$f_5 = F_5 - F_4 = 1,00 - 0,85 = 0,15$

B3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{1000}{20} = 50$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

B4.
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{11200}{20} = 560$$

$$s = \sqrt{s^2} \approx 23,7$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{23,7}{50} = 0,474 \text{ ή } 47,4\%.$$

Το δείγμα είναι ανομοιογενές γιατί $CV > 10\%$.

B5. τιμή τουλάχιστον 50: $\frac{1}{2} \cdot f_3 + f_4 + f_5 = \frac{1}{2} \cdot 0,20 + 0,20 + 0,15 = 0,45 \text{ ή } 45\%.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$

Επίσης, θα πρέπει

$$\sqrt{x+1} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \neq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 \neq 2^2 \Leftrightarrow x+1 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Άρα $A_f = [-1,3) \cup (3,+\infty)$

Γ2.
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3}$$

Παραγοντοποίηση $x^2 - 2x - 3 = 1 \cdot (x-3)(x-(-1)) = (x-3)(x+1)$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Επομένως:
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+1} + 2)}{x-3} = (3+1)(\sqrt{3+1} + 2) = 4 \cdot 4 = 16$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο $x=3$, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \quad (1)$$

$$f(3) = \sin(3-3) + \eta\mu(9-3^2) + \alpha^2 - 1 = \sin 0 + \eta\mu 0 + \alpha^2 - 1 = 1 + 0 + \alpha^2 - 1 = \alpha^2$$

$$(1) \Rightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow \alpha = \pm 4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = f'(-1) = -6$, θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f .

$$f'(x) = \left(-\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{\kappa x^2}{2}\right)' - (3)' = -x^2 + \kappa x$$

$$\lambda = f'(-1) = -6 \Leftrightarrow -(-1)^2 + \kappa \cdot (-1) = -6 \Leftrightarrow -1 - \kappa = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\kappa = -6 + 1 \Leftrightarrow -\kappa = -5 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = -1$ θα έχει τη μορφή: $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(-1) = -6$.

$$y = f(-1) = -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{\kappa(-1)^2}{2} - 3 = \frac{1}{3} + \frac{5 \cdot 1}{2} - 3 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{2 + 15 - 18}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$y = -6x + \beta \Leftrightarrow -\frac{1}{6} = -6 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow -\frac{1}{6} - 6 = \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{37}{6}$$

$$\text{Εξίσωση εφαπτομένης: } y = -6x - \frac{37}{6}$$

Δ3. Βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους (παράγωγο): $f'(x) = -x^2 + 5x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$	↓		↑	↓

T.M.

Θα πρέπει να κατασκευάσει $x = 5$ καναπέδες το μήνα για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

Δ4. $f'(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 = 0$

$$f'(1) = -1^2 + 5 \cdot 1 = -1 + 5 = 4$$

$$f'(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 = -4 + 10 = 6$$

$$f'(4) = -4^2 + 5 \cdot 4 = -16 + 20 = 4$$

$$f'(5) = -5^2 + 5 \cdot 5 = -25 + 25 = 0$$

$$f'(6) = -6^2 + 5 \cdot 6 = -36 + 30 = -6$$

Δ5. $-6, 0, 0, 4, 4, 6$

$v = 6$ (άρτιος) Μεσαίες: $3^{\text{η}}$ και $4^{\text{η}}$ παρατήρηση, $\delta = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Εύρος: $R = x_{\max} - x_{\min} = 6 - (-6) = 6 + 6 = 12$

$$\bar{x} = \frac{-6+0+0+4+4+6}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1,33\dots$$