ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

1. Ο φυσικός αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή μιας μεταβλητής ονομάζεται συχνότητα v_i.

2. Σχετική συχνότητα f_i ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας v_i προς το μέγεθος ν του δείγματος: $f_i = \frac{v_i}{v}$.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$. Έχουμε:

$f(x+h)-f(x)=c-c=0$

και για $h\neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$. Επομένως:

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$. Άρα $(c)'=0$

Α2.

1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Λ

Α3.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\ell$

2. $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

3. $(\text{συνx})'=-\text{ημ}x$

4. Αν CV = 9%, τότε το δείγμα είναι *ομοιογενές*.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\bar{x} = 7 \Leftrightarrow \dfrac{8+5+2\omega-2+5+9+2\omega+1+\omega+3+6+8+7}{10} = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\omega + 50 = 70 \Leftrightarrow 5\omega = 20 \Leftrightarrow \omega = 4$

Β2. Αντικαθιστώντας την τιμή του ω (ω = 4), οι αριθμοί μπαίνοντας σε αύξουσα σειρά θα είναι οι:

$$5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9$$

Το πλήθος του δείγματος είναι 10, άρα υπάρχουν 2 μεσαίες παρατηρήσεις, η 5^{η} και η 6^{η}. Δηλαδή $\delta = \dfrac{7+7}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$.

Β3. $s^2 = \dfrac{(5-7)^2\cdot 2+(6-7)^2\cdot 2+(7-7)^2\cdot 2+(8-7)^2\cdot 2+(9-7)^2\cdot 2}{10} =$

$= \dfrac{8+2+0+2+8}{10} = \dfrac{20}{10} = 2$

Άρα η τυπική απόκλιση θα είναι ίση με: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}$

Β4. $\bar{x}' = \dfrac{5+5+6+6+7+7+8+8+9+9+4+10}{12} = \dfrac{84}{12} = 7$

ΘΕΜΑ Γ

Α

Γ1. Επειδή η εφαπτομένη της καμπύλης της f είναι παράλληλη στην ευθεία ε, θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Δηλαδή: $\lambda = f'(1) = 2$.

Είναι: $f'(x) = (x^3)' - (2\alpha x^2)' + (5x)' - (2)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4\alpha x + 5$.

$f'(1) = 2 \Leftrightarrow 3\cdot 1^2 - 4\alpha\cdot 1 + 5 = 2 \Leftrightarrow -4\alpha = 2-8 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$.

Γ2. $f(1) = 1^3 - 2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 2 = 1-3+3 \Leftrightarrow f(1) = 1$

$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow f(1) = f'(1)\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 1 = 2\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$.

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$y = 2x - 1$$

Β

Γ3. Θα πρέπει $6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$

Επίσης, θα πρέπει $4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 4 \Leftrightarrow x\neq \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.

Άρα $A_g=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,6]$

Γ4. $$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{6-x}}{4-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\left(2-\sqrt{6-x}\right)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2^2-\left(\sqrt{6-x}\right)^2}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4-6+x}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(2-x)}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=-\frac{1}{4\cdot 4}=-\frac{1}{16}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $S(t)=\frac{2t^3}{3}-7t^2+20t+2$

$$S(3)=\frac{2\cdot 3^3}{3}-7\cdot 3^2+20\cdot 3+2=18-63+60+2=17 \text{ m}.$$

Δ2. $$S'(t)=\left(\frac{2t^3}{3}\right)'-\left(7t^2\right)'+\left(20t\right)'+\left(2\right)'=2t^2-14t+20 \text{ m/sec}.$$

Δ3. Η ταχύτητα ενός σώματος είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του.

Άρα $u(t)=S'(t)$. Επομένως: $u(t)=0 \Leftrightarrow S'(t)=0 \Leftrightarrow 2t^2-14t+20=0$

Για αυτήν έχουμε: $\Delta=(-14)^2-4\cdot 2\cdot 20=196-160=36$ και

$$t_{1,2}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 2}=\begin{cases}\frac{14+6}{4}=5\\ \frac{14-6}{4}=2\end{cases}.$$

Άρα η ταχύτητα μηδενίζεται όταν t = 2s ή t = 5s.

Δ4. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση της θέσης ως προς τη μονοτονία:

t	0	2	5	10
S'(t)	+	0	-	0	+
S(t)	↗		↘		↗

Στο (2,5) είναι S'(t)<0, άρα στο [2,5] η S(t) είναι γνησίως φθίνουσα.
Άρα η θέση του σώματος μειώνεται από 2 έως 5 sec.

Δ5. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας ως προς τα ακρότατα.

$u(t)=2t^2-14t+20$ m/sec.

$u'(t)=\left(2t^2\right)'-\left(14t\right)'+\left(20\right)'=4t-14$ m/sec^2.

$u'(t)=0 \Leftrightarrow 4t-14=0 \Leftrightarrow t=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$ sec.

t	0	7/2	10
u'(t)	-	0	+
u(t)	↘		↗

Στο [0, 7/2) είναι u'(t)<0 και στο (7/2 , 10] είναι u'(t)>0. Άρα στο t = 7/2 sec η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη, με τιμή:

$$u\left(\frac{7}{2}\right)=2\left(\frac{7}{2}\right)^2-14\left(\frac{7}{2}\right)+20=2\cdot\frac{49}{4}-49+20=-\frac{9}{2}\ \text{m/sec.}$$