Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Α. σχολικό βιβλίο σελ.122.

Β. **i.** δ
ii. α
iii. β

Γ. **i.** Σ
ii. Σ
iii. Λ
iv. Λ
v. Λ

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Α. Πρέπει και αρκεί $x^2+2x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq -2$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{0,-2\}$.

Β.

$$A=\frac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(4)}-2}=\frac{1+1}{\sqrt{2}-2}=\frac{2}{\sqrt{2}-2}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=\frac{2(\sqrt{2}+2)}{2-4}=-(\sqrt{2}+2)$$

Γ. $|f(4)\cdot x-1|=|2-f(3)\cdot x| \Leftrightarrow |2x-1|=|2-x| \Leftrightarrow 2x-1=2-x$ ή $2x-1=-2+x \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

ΘΕΜΑ 3ο

i)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left[-(\lambda+1)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot \lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 \geq 0$$

ii)

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - 2\lambda = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

όπου $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-(\lambda+1)}{1} = \lambda + 1$ και $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{1} = \lambda$.

iii) Αν $\lambda = 3$ τότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 4x + 3 = 0$. Οπότε

$x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-4}{1} = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{3}{1} = 3$.

Άρα $S = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\cdot 4 = 8$ και
$P = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4\cdot 3 = 12$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση 2ου βαθμού είναι η
$x^2 - S\cdot x + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

i) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 1\cdot 1 = 1 \neq 0$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii) $D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda^2 + \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda - \lambda^2 - \lambda = -\lambda^2 - 3\lambda$.

$D_\psi = \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 + \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda - \lambda = -\lambda^2 - 2\lambda$.

Επομένως $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-\lambda^2 - 3\lambda}{1} = -\lambda^2 - 3\lambda$ και

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-\lambda^2 - 2\lambda}{1} = -\lambda^2 - 2\lambda$ οπότε $(x_0, y_0) = (-\lambda^2 - 3\lambda, -\lambda^2 - 2\lambda)$
είναι η λύση του συστήματος.

iii) $x_0 + y_0 \geq -3 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 3\lambda + (-\lambda^2 - 2\lambda) \geq -3 \Leftrightarrow -2\lambda^2 - 5\lambda + 3 \geq 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3 = 25 + 24 = 49.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2\cdot(-2)} = \frac{5 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5+7}{-4} = -3 \\ \lambda_2 = \dfrac{5-7}{-4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

λ	-∞		**-3**		**½**		+∞
$-2\lambda^2-5\lambda+3$		-	**0**	+	**0**	-	

Άρα $\lambda \in \left[-3, \frac{1}{2}\right]$