ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο^

Α.

αριθμός παιδιών x_i	οικογένειες v_i	σχετικές συχνότητες $f_i\%$	αθροιστικές συχνότητες N_i	σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$
0	3	12	3	12
1	6	24	9	36
2	6	24	15	60
3	8	32	23	92
4	2	8	25	100
Σύνολα	ν = 25	100	-	-

Β. Η μέση τιμή είναι : $\bar{x} = \dfrac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4 + v_5 \cdot x_5}{v}$

$$= \frac{3\cdot 0 + 6\cdot 1 + 6\cdot 2 + 8\cdot 3 + 2\cdot 4}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

Επειδή $v = 25$ η διάμεσος είναι η 13^{η} παρατήρηση, οπότε είναι ίση με 2.

Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή $x_4 = 3$ γιατί έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα $(v_4 = 8)$.

Γ. Η διακύμανση είναι

$$S^2 = \frac{v_1\cdot(\bar{x}-x_1)^2 + v_2\cdot(\bar{x}-x_2)^2 + v_3\cdot(\bar{x}-x_3)^2 + v_4\cdot(\bar{x}-x_4)^2 + v_5\cdot(\bar{x}-x_5)^2}{v}$$

$$= \frac{3\cdot(2-0)^2 + 6\cdot(2-1)^2 + 6\cdot(2-2)^2 + 8\cdot(2-3)^2 + 2\cdot(2-4)^2}{25}$$

$$= \frac{3\cdot 4 + 6\cdot 1 + 6\cdot 0 + 8\cdot 1 + 2\cdot 4}{25}$$

$$= \frac{12+6+0+8+8}{25}$$

$$= \frac{34}{25} = 1,36$$

Η τυπική απόκλιση είναι $S=\sqrt{1,36}$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{1,36}}{2}>0,1$ και επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

(ή αλλιώς είναι $\sqrt{1,36}>1$ οπότε $\frac{\sqrt{1,36}}{2}>\frac{1}{2}$ ή $CV>50\%$)

(ακριβέστερα είναι $CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{1,36}}{2}\approx\frac{1,16}{2}=0,58$ ή 58%.)

Δ. **i)** Το πλήθος των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 3 παιδιά είναι $\nu_4+\nu_5=8+2=10$ και το ποσοστό τους είναι $\frac{10}{25}\cdot 100\%=40\%$.

ii) Το πλήθος των οικογενειών που έχουν το πολύ 2 παιδιά είναι $\nu_1+\nu_2+\nu_3=3+6+6=15$ και το ποσοστό τους είναι $\frac{15}{25}\cdot 100\%=60\%$.

iii) Το πλήθος των οικογενειών που έχουν ένα μόνο παιδί είναι $\nu_2=6$ και το ποσοστό τους είναι $\frac{6}{25}\cdot 100\%=24\%$.

ΖΗΤΗΜΑ 2^{o}

i) $f(0)=\alpha\cdot 0^2-1=-1$, $f(2)=4\cdot 2-5=3$ και $f(3)=4\cdot 3-5=7$

ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\alpha\cdot x^2-1\right)=\alpha\cdot 2^2-1=4\alpha-1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(4x-5\right)=4\cdot 2-5=3$

iii) Για να είναι συνεχής στο σημείο $x=2$, πρέπει

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

δηλαδή $4\alpha-1=3$, άρα $4\alpha=4$, άρα $\alpha=1$.

iv) Για $\alpha=1$, είναι $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x<2 \\ 4x-5 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x=2$, μόνο αν ισχύει:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

- για $h<0,$ είναι $2+h<2$ οπότε:

  $f(2+h)=(2+h)^2-1=4+4h+h^2-1=3+4h+h^2$, και

  $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{3+4h+h^2-3}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h,$$

  οπότε $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(4+h)=4$

- για $h>0,$ είναι $2+h>2$ οπότε:

  $f(2+h)=4(2+h)-5=8+4h-5=3+4h$, και

  $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{3+4h-3}{h}=\frac{4h}{h}=4,$$

  οπότε $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}4=4$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=4$, οπότε

η f είναι παραγωγίσιμη για $x=2$, με $f'(2)=4$.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

α) Είναι $f'(x)=3x^2-12x+9$, οπότε

$$\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-12x+9}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3(x^2-4x+3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-1)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}3(x-1)$$
$$=3(3-1)=6$$

β) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + \alpha$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ και
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με τιμή $f(1) = 1 - 6 + 9 + \alpha = 4 + \alpha$ και
- τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ με τιμή $f(3) = 27 - 54 + 27 + \alpha = \alpha$.

γ) Πρέπει $f(1) = 2 \cdot f(3) \Leftrightarrow 4 + \alpha = 2\cdot\alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$

δ) Για $\alpha = 4$ ο τύπος της $f(x)$ γίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, $x \in \mathbb{R}$

οπότε $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x + c$ με $F(0)=0$ $\Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως η ζητούμενη παράγουσα της $f(x)$ είναι η συνάρτηση

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4ο</u>

i) Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $S(t)$ είναι

$$S'(t) = \left(t^2 + 18\cdot \ell n(t+1) + 4\right)' = 2t + 18\,\frac{1}{t+1}(t+1)' = 2t + \frac{18}{t+1}.$$

και εκφράζει την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του σημείου κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$.

ii) Η αρχική ταχύτητα του σημείου είναι $\upsilon(0) = S'(0) = 2\cdot 0 + \frac{18}{0+1} = 18 \ \left(m/s\right)$

iii) Η επιτάχυνση του σημείου κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$\gamma(t) = \upsilon'(t) = S''(t) = \left(2t + \frac{18}{t+1}\right)' = 2 + \frac{(18)'(t+1) - (18)(t+1)'}{(t+1)^2} = 2 - \frac{18}{(t+1)^2}$$

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 5$ s, η επιτάχυνση είναι

$$\gamma(5) = 2 - \frac{18}{(5+1)^2} = 2 - \frac{18}{36} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ \left(m/s^2\right)$$

iv) Η ταχύτητα του σημείου κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $\upsilon(t)=2t+\dfrac{18}{t+1}$ με

$\upsilon'(t)=\left(2t+\dfrac{18}{t+1}\right)'=2-\dfrac{18}{(t+1)^2}$ οπότε:

$$\upsilon'(t)=0 \Leftrightarrow 2-\frac{18}{(t+1)^2}=0 \Leftrightarrow 2=\frac{18}{(t+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(t+1)^2=18 \Leftrightarrow (t+1)^2=9$$

$$\Leftrightarrow t+1=3 \Leftrightarrow t=2$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $\upsilon'(t)$:

t	0		2		$+\infty$
$\upsilon'(t)$		$-$	0	$+$	
$\upsilon(t)$		$\searrow$	Ελάχ.	$\nearrow$	

Άρα η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t=2$ s.

Η ελάχιστη ταχύτητα είναι $\upsilon(2)=2\cdot 2+\dfrac{18}{2+1}=4+6=10\ \left(\dfrac{m}{s}\right)$.