

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

Θέματα Άλγεβρας Β' Λυκείου Γενικής Παιδείας ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

A.

1. $F_{\max} = 2004, F_{\min} = -2004, T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
2. $\sqrt{\alpha\beta}$
3. $(-2, e^2)$
4. Σωστό

B. Θεωρία (σχολικό βιβλίο)

Γ. Θεωρία (σχολικό βιβλίο)

Δ. $a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < 1$ άρα η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως έχουμε: $\left(\frac{1}{a}\right)^{\ln x} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\ln y} \Rightarrow \ln x < \ln y$ και, επειδή η συνάρτηση $g(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι $x < y$.

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

A. $A = \frac{1 - \eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2} = \frac{1 - \eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1 - \eta\mu 2\theta}{1 - \eta\mu 2\theta} = 1$

B. $2\eta\mu^3\chi - 4\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^3\chi - 2\eta\mu\chi + 1 - \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi - 2\eta\mu\chi + 1 = 0$$

Θέτω $\eta\mu\chi = \omega$ και έχω την εξίσωση: $2\omega^3 - \omega^2 - 2\omega + 1 = 0$.

Με σχήμα Horner (για $p=1$) έχω $(\omega - 1) \cdot (2\omega^2 + \omega - 1) = 0 \Leftrightarrow \omega = 1, \omega = -1, \omega = \frac{1}{2}$

Άρα $\eta\mu\chi = 1$ ή $\eta\mu\chi = -1$ ή $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ και, επειδή $\chi \in [0, \pi]$, έχουμε τελικά $\chi = \frac{\pi}{2}$ ή

$$\chi = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \chi = \frac{5\pi}{6}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 3^ο

1. Με σχήμα Horner για το $P(x)$ και για $\rho=1$, προκύπτει υπόλοιπο (εκ ταυτότητας) 0 και πηλίκο $\Pi(x) = x^3 - \alpha x^2 + (b - \alpha)x - \alpha$. Με νέο σχήμα Horner για το $\Pi(x)$ και $\rho=1$, προκύπτει υπόλοιπο $-3\alpha + \beta + 1$, το οποίο πρέπει (αφού το 1 είναι διπλή ρίζα του $P(x)$) να είναι 0. Άρα έχουμε $-3\alpha + \beta + 1 = 0$ (1). Εξάλλου, από υπόθεση, $P(2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -7\alpha + 2\beta + 8 = 0$ (2). Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2), βρίσκουμε $a = 6, b = 17$.
2. Είναι $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ και $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ (προκύπτει εύκολα, λύνοντας την $P(x)=0$). Αφού $2 \cdot 2 = 1 + 3$ και $(e^2)^2 = e^1 \cdot e^3$, ισχύει το ζητούμενο.
3. Έστω e, b_1, b_2, b_3, e^2 , οι πέντε όροι της γεωμετρικής προόδου. Αν λ ο λόγος της προόδου, θα ισχύει $e^2 = e \cdot \lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4 = e \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt[4]{e}$. Άρα θα είναι:
$$b_1 = e \cdot \sqrt[4]{e} = e^{\frac{5}{4}}, b_2 = e \cdot (\sqrt[4]{e})^2 = e \cdot \sqrt{e} = e^{\frac{3}{2}}, b_3 = e \cdot \sqrt{e} \cdot \sqrt[4]{e} = e^{\frac{7}{4}}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4^ο

1. Είναι $\log_x y = \frac{\log y}{\log x} = \frac{\ln y}{\ln x}$ (τύπος αλλαγής λογαριθμικής βάσης) από όπου προκύπτει το ζητούμενο.
2. Η δοσμένη σχέση (και λόγω του 1) γράφεται $(\log_x y - 2)^2 = 0$, άρα είναι $\log_x y = 2 \Leftrightarrow y = x^2$, η ζητούμενη σχέση.
3. Έχουμε $e^{2y^2 - 3y + 1} = (2004)^0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1, y = \frac{1}{2}$. Η λύση $y = 1$ απορρίπτεται, αφού, αν $y = 1$, θα είναι $x = \pm 1$, αδύνατο. Άρα $y = \frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (η αρνητική τιμή απορρίπτεται).
4. Από υπόθεση έχουμε
$$(\ln x - 2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\ln x - 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \ln x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \ln x \leq 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e \leq x \leq e^3 \Leftrightarrow e^2 \leq x^2 \leq e^6$$
 και προκύπτει το ζητούμενο.