ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία

Β.

i) Λάθος αφού για την ευθεία $x=0$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

ii) Λάθος το διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$ είναι κάθετο στην ευθεία ε.

iii) Σωστό $\gamma \parallel [(\alpha+\beta)-\alpha]$ άρα $\gamma \parallel \beta$.

Γ. Θεωρία

Θέμα 2ο

i) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\frac{5}{8}\vec{\alpha}=\frac{5}{8}\vec{\alpha}^{\,2}=\frac{5}{8}|\vec{\alpha}|^2=\frac{5}{8}\cdot 4^2=10$

ii) Έστω $\varphi=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{10}{4\cdot 5}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2}$, άρα $\varphi=60^\circ$.

iii) $|\vec{u}|^2=\vec{u}^{\,2}=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^{\,2}+\vec{\beta}^{\,2}-2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}=4^2+5^2-2\cdot 10=21$, επομένως $|\vec{u}|=\sqrt{21}$.

iv) $\vec{\beta}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{\beta}\left[(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-\kappa\cdot\vec{\beta}\right]=0\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot(10\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta})=0\Leftrightarrow$

$10\vec{\alpha}\vec{\beta}-\kappa\vec{\beta}^{\,2}=0\Leftrightarrow 10\cdot 10-\kappa|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow\kappa\cdot 5^2=100\Leftrightarrow\kappa=4$.

Θέμα 3ο

i) $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα α περιττός. Έτσι $\alpha^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\beta = \kappa^2 + \kappa = \kappa(\kappa + 1) = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$ (γινόμενο διαδοχικών ακεραίων)

Άρα $\alpha^2 + \beta = 8\lambda + 1 + 2\mu = 2(4\lambda + \mu) + 1 = 2\nu + 1$, $\nu = 4\lambda + \mu \in \mathbb{Z}$,

δηλαδή $\alpha^2 + \beta$ περιττός.

ii) Το τετράγωνο περιττού ακεραίου είναι της μορφής $8\gamma + 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

Άρα $\dfrac{(\alpha^2 + \beta)^2 + 31}{8} = \dfrac{8\gamma + 1 + 31}{8} = \dfrac{\cancel{8}(\gamma + 4)}{\cancel{8}} = \gamma + 4 \in \mathbb{Z}$.

iii) $\alpha + \beta = 2\kappa + 1 + \kappa^2 + \kappa = \kappa^2 + 3\kappa + 1$ και αφού $\kappa = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ τότε

$\alpha + \beta = (3\lambda + 1)^2 + 3(3\lambda + 1) + 1 = 6\lambda^2 + 15\lambda + 3 + 2 = 3(2\lambda^2 + 5\lambda + 1) + 2$ με

$(2\lambda^2 + 5\lambda + 1) \in \mathbb{Z}$, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha + \beta$ με το 3 είναι 2.

Θέμα 4ο

i) Οι εφαπτομένες της υπερβολής στις κορυφές της A' και A είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x = -\alpha$ και $(\varepsilon_2): x = \alpha$ αντίστοιχα.

Η εξίσωση της ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda > 0$, που διέρχεται από το σημείο $K(0, \beta)$ είναι η

$(\varepsilon): y - \beta = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow y = \lambda x + \beta$.

$$\left.\begin{array}{ll}(\varepsilon_1): & x = -\alpha \\ (\varepsilon): & y = \lambda x + \beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\alpha \\ y = -\alpha\lambda + \beta\end{array}\right\} \text{ άρα } M(-\alpha, -\alpha\lambda + \beta).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\varepsilon_2): & x = \alpha \\ (\varepsilon): & y = \lambda x + \beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha\lambda + \beta\end{array}\right\} \text{ άρα } P(\alpha, \alpha\lambda + \beta).$$

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου του MP, δηλαδή του κέντρου του κύκλου είναι $\left(\dfrac{-\alpha + \alpha}{2}, \dfrac{\cancel{-\alpha\lambda} + \beta + \cancel{\alpha\lambda} + \beta}{2}\right) = (0, \beta)$.

Επίσης $(MP) = \sqrt{(\alpha + \alpha)^2 + (\alpha\lambda + \cancel{\beta} + \alpha\lambda - \cancel{\beta})^2} = \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha^2\lambda^2} = 2\alpha\sqrt{1 + \lambda^2}$,

άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \dfrac{(MP)}{2} = \alpha\sqrt{1 + \lambda^2}$ και η εξίσωσή

του: $x^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2(1 + \lambda^2)$.

iii) Έχουμε

$$\rho = A'A \Leftrightarrow \alpha\sqrt{1+\lambda^2} = 2\alpha \Leftrightarrow \sqrt{1+\lambda^2} = 2 \Leftrightarrow 1+\lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{3}.$$

iv) Ο κύκλος $x^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2(1+\lambda^2)$ διέρχεται από την εστία $E(\gamma, 0)$ αν και μόνο αν $\gamma^2 + (0-\beta)^2 = \alpha^2(1+\lambda^2)$ δηλαδή

$$\gamma^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \alpha^2\lambda^2 \Leftrightarrow \gamma^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2\lambda^2 \Leftrightarrow \alpha^2\lambda^2 = 2\gamma^2 - 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\varepsilon^2 - 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2\varepsilon^2 - 2}.$$