**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**α)** θεωρία. (ΘΕΤ)

β) Σ-Σ-Λ-Λ-Λ.

γ) ι) Θεωρία Σελίδα 99.

ιι) Η διανυαματική ακτίνα του $z_2$ προκύπτει με στροφή της διανυαματικής ακτίνας του $z_1$ κατά $90^o$

δ) Θεωρία Σελίδα 217

**ΘΕΜΑ 2ο**

**α) i)**είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

$f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,\ +\infty)$

ii) $f''(x)=\left(\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}\right)'=\dfrac{-2f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}<0$ κ.λ.π

iii) αφού $f'(0)=1$ η ισότητα $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ για $\chi=0$ δίνει $f(0)=0$ Η f ως είναι γνησίως αύξουσα

είναι 1-1και έχει μοναδική ρίζα την x=0.

β) i) $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)[1+e^{f(x)}]=2\Leftrightarrow\left(1+e^{f(x)}\right)'=(2x)'\Leftrightarrow$

$f(x)+e^{f(x)}=2x+c$. Αλλά $f(0)=0\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(x+e^x-1)$ iii) Βρίσκουμε την y=x

γ) i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1-e^{f(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^{f(x)}}{x})=2+-0=2=\lambda$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1-e^{f(x)}-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{f(x)})=1-0=1$

'Αρα y=2x+1

ii)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-e^{f(x)}}{x}=\lim_{x\to+-\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{e^{f(x)}}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{f'(x)}{x'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{1+e^{f(x)}}\right)=2+0-0=2=\lambda'$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda' x]=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-e^{f(x)}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{f(x)})=-\infty \text{ κ.λ.π}$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Είναι $z+2i=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta),\ \rho>0$.

i) $f(z_0)=\dfrac{2z_0}{z_0+2i}=3+i\Leftrightarrow \dots z_0=$ -2-4i. 'Αρα Α(-2, -4)

ii) $f(z)-2=\dfrac{2z}{z+2i}$.-2= $\dfrac{-4i}{z+2i}=\dfrac{4[\text{συν}(3\pi/2)+i\text{ημ}(3\pi/2)]}{\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)}$

$$=\frac{4}{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

iii) $|f(z)-2|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{4}{\rho}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\rho=2\sqrt{2}$ δηλαδή $|z+2i|=2\sqrt{2}$ που σημαίνει ότι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c, του οποίου το κέντρο είναι Κ(0, -2) και η ακτίνα $2\sqrt{2}$.

iv) Arg ( f(z) −2 ) = $\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3\pi}{2}-\theta=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ Τότε,

Arg ( z +2 i)= Arg (x+i(y+2))= $\dfrac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{y+2}{x}=\text{εφ}\dfrac{5\pi}{4}\Leftrightarrow y=x-2$ με $x<0$

**ΘΕΜΑ 4ο**

α) Είναι

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\le 1\Leftrightarrow \dots x^2+x^4\ge 0$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ge-\frac{1}{8}\Leftrightarrow \dots (x^2-3)^2\ge 0$$

β) Θεώρημα μέσης τιμής στο [α, β] ή στο [ημx, x] ( είναι ημx<x για x>0):

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi)\le\ \beta-\alpha$$

γ) Είναι

$$g(x)=F(x)+G(x)=\int_{1/e}^{x} f(t)dt+\int_{1/e}^{x}\frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$=\int_{1/e}^{x}\left(f(t)+\frac{f(t)}{t^2}\right)dt=\int_{1/e}^{x}\left(\frac{1}{t}\right)dt=\ln x+1$$

δ) Έχουμε:

$$h'(x)=[F(\varepsilon\varphi(x))+G(\sigma\varphi(x))]'=F'(\varepsilon\varphi(x))\cdot(\varepsilon\varphi(x))'+G'(\sigma\varphi(x))\cdot(\sigma\varphi(x))'$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}(1+\varepsilon\varphi^2 x)+\frac{1}{\sigma\varphi x(1+\sigma\varphi^2 x)}[-(1+\sigma\varphi^2 x)]$$

$$=\varepsilon\varphi x-\frac{1}{\sigma\varphi x}=0$$

για $x=\pi/4$: $h(\pi/4)=F(1)+G(1)=g(1)=\ln 1+1=1$, άρα κ.λ.π. $h(x)=1$ στο Δ.

δ) παραλλαγή 3 i), ii)

$$E=F(e)=\int_{1}^{e} f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(1+x^2)\right]_1^e=\ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

$$\int_{1}^{e}\frac{1}{t(1+t^2)}dt=G(e)\overset{(\gamma)}{=}\ln e-F(e)=1-\ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

ε) Είναι

$$E=\int_0^{1e}(1-f'(x))dx=[x-f(x)]_0^1=\left[x-\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$