ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0) = \eta$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Έστω οι αριθμοί α, β, $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ και η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f.
Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική της παράσταση έχει σ' ένα τουλάχιστον σημείο της οριζόντια εφαπτομενη.

ii) Υπάρχουν x_1, $x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

iii) Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

iv) Ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right)' = f(x)$

v) $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$, για κάθε $\lambda \in \nabla$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2Χ5=10

γ) Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, $z_2 \neq 0$ και έστω Α, Β οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) Αν $z_2 = i \cdot z_1$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές (Ο είναι η αρχή των αξόνων).

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

δ) Να αποδέιξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι πραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και

$$f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } f'(0)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f :

i) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) στέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Να αποδείξετε ότι:

i) ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο $-\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Να αποδείξετε οτι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq -2i$ και θεωρούμε τον $f(z) = \dfrac{2z}{z+2i}$.

Έστω ρ το μέτρο και θ ένα όρισμα του μιγαδικού z+2i.

i) Βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας Α του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, για τον οποίο ισχύει $f(z_0) = 3+ i$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) Να βρείτε συναρτήσει των ρ και θ , το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $f(z)-2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

iii) Αν $|f(z)-2|=\sqrt{2}$, να αποδείξετε οτι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

iv) Αν $\operatorname{Arg}(f(z)-2)=\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε οτι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε μιά ημιευθεία ε.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

v) Να αποδείξετε οτι το σημείο Α ανήκει στον κύκλο c και στην ημιευθεία ε.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ΘΕΜΑ 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι F, G με

$$F(x)=\int_{1/e}^{x} f(t)dt,\quad G(x)=\int_{1/e}^{x}\frac{f(t)}{t^2}dt,\quad x>0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) i) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) $-\frac{1}{8}\le f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0<\alpha<\beta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\le \beta-\alpha$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x)=F(x)+G(x),\ x>0$

είναι $g(x)=\ln x+1,\ x>0$ ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ) Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στα σημεία $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$ και

$$h(x)=F(\varepsilon\varphi(x))+G(\sigma\varphi(x)) \text{ με } 0<x<\frac{\pi}{2},$$

τότε, είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Να βρεθεί η τιμή της h.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f'(x)$, $h(x)$ και την ευθεία $x=1$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο (παραλλαγη 2)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και

$$f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} \text{ για κάθε } x\in \mathbb{R}, \text{ με } f'(0)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f

i) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Να αποδείξετε ότι: ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x+1$, για κάθε $x\in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο $-\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Να αποδείξετε οτι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ) Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f και πρόχειρη γραφική της παράσταση.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4.(παραλλαγή 2)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι F, G με

$$F(x) = \int_{1/e}^{x} f(t)dt, \quad G(x) = \int_{1/e}^{x} \frac{f(t)}{t^2}dt, \quad x>0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) i) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x\in \mathbb{R}^*$. ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Για για κάθε x>0 ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)\leq x-\eta\mu x$$ ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x)=F(x)+G(x),\ x>0$

είναι $g(x)=\ln x+1,\ x>0$ ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ) Η συνάρτηση h με $h(x)=F(\varepsilon\varphi(x))+G(\sigma\varphi(x))$

είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Να βρεθεί η τιμή της h.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παρα-στάσεις των συναρτήσεων $f'(x)$, $h(x)$ και την ευθεία $x=1$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 4. (παραλλαγή.3)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι F, G με

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt,\ x>0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) i) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) $-\frac{1}{8}\leq f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0<\alpha<\beta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\leq\beta-\alpha$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x)=F(x)+G(x),\ x>0$

είναι $g(x)=\ln x,\ x>0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ) i) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=e είναι ίσο με

$$\ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}\,.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii)

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = 1-\ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4