ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο

i) Οι αριθμοί β, γ είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί η μονάδα γράφεται σαν γραμμικός τους συνδιασμός.

ii) Έστω δ=(α, β) και δ΄=(αγ, β).

- Αφού δ/α και δ/β είναι δ/αγ και δ/β άρα δ/(αγ, β) = δ΄, δηλαδή δ/δ΄ (1)
- Αφού δ΄/αγ και δ΄/β είναι δ΄/αγ και δ΄/αβ οπότε δ΄/(αγ, αβ)=|α|(γ, β) = |α|,άρα δ΄/α, έτσι δ΄/(α, β)=δ (2). Οι (1) και (2) δίνουν δ=δ΄.

iii) Η πρόταση p(0): $(\alpha\gamma^0, \beta)=(\alpha, \beta)$ είναι αληθής.

Έστω ότι ισχύει η p(ν): $(\alpha\gamma^\nu, \beta) = (\alpha, \beta)$ (3).

Θα δειχτεί η p(ν+1): $(\alpha\gamma^{\nu+1}, \beta) = (\alpha, \beta)$.

Είναι $(\alpha\gamma^{\nu+1}, \beta) = (\alpha\gamma^\nu\gamma, \beta)$

$= ((\alpha\gamma^\nu)\gamma, \beta)$ (από την ii) για α το $(\alpha\gamma^\nu)$)

$\overset{(ii)}{=} (\alpha\gamma^\nu, \beta) \overset{(3)}{=} (\alpha, \beta)$

iv) $$[\alpha\gamma^\nu,\beta]=\frac{|\alpha\gamma^\nu\beta|}{(\alpha\gamma^\nu,\beta)}=\frac{|\gamma|^\nu|\alpha\beta|}{(\alpha,\beta)}=|\gamma|^\nu[\alpha,\beta]$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α) Επειδή $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε

$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda$

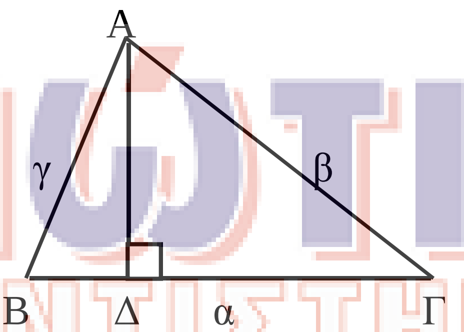
β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^{2}}\right)$ άρα

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \left(\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^{2}}\right)\vec{\alpha}$$

γ) $\vec{v}_1 = \pi\rho o\beta_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}^{2}}\right)\vec{u} = \frac{5}{25}\vec{u} = \left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \ldots$$

Β.



$$(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\vec{B\Delta} + (\gamma\sigma\upsilon\nu B)\vec{\Gamma\Delta} = (\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\pi\rho o\beta_{\vec{B\Gamma}}\vec{BA} + (\gamma\sigma\upsilon\nu B)\pi\rho o\beta_{\vec{B\Gamma}}\vec{\Gamma A}$$

$$= (\gamma\sigma\upsilon\nu B)\left(\frac{\vec{BA}\,\vec{B\Gamma}}{\left(\vec{B\Gamma}\right)^2}\right)\vec{B\Gamma} + (\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\left(\frac{\vec{\Gamma A}\,\vec{\Gamma B}}{\left(\vec{\Gamma B}\right)^2}\right)\vec{\Gamma B}$$

$$= (\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\left(\frac{\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B}{\alpha^2}\right)\vec{B\Gamma} + (\gamma\sigma\upsilon\nu B)\left(\frac{\beta\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha^2}\right)\vec{\Gamma B} = \vec{0}.$$

ή

$(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\vec{B\Delta} + (\gamma\sigma\upsilon\nu B)\vec{\Gamma\Delta} =$ ... κι $(\Gamma\Delta)\vec{B\Delta} \uparrow\downarrow (B\Delta)\vec{\Gamma\Delta}$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)=(\pm\gamma,0)$ είναι η κοινή εστία, τότε:

$$\frac{p}{2}=\pm\gamma=\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\Leftrightarrow\frac{p^2}{4}=\alpha^2-\beta^2 \qquad (1)$$

i) Η (1) δίνει $\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2-\left(\frac{\beta}{p}\right)^2=\frac{1}{4}$ οπότε το Μ ανήκει στην ισο-

σκελή υπερβολή $\quad x^2-y^2=\frac{1}{4}$

ii) Έστω $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ η κοινή εστία και $E'\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$.

Αν $(x_1,\ y_1)$ είναι σημείο επαφής τότε: $\quad y_1^2=2px_1 \qquad (2)$ και η εφαπτόμενη έχει εξίσωση: $\quad yy_1=p(x+x_1) \quad (3)$ η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του Ε΄, αν και μόνον αν:

$$p\left(-\frac{p}{2}+x_1\right)=0\Leftrightarrow x_1=\frac{p}{2},$$

Από τη (2) προκύπτει $y_1=\pm p$. Έτσι, τα σημεία επαφής είναι τα

$$A\left(\frac{p}{2},p\right),\quad B\left(\frac{p}{2},-p\right)$$

και οι εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις

$$y = x+p/2,\quad y = -x-p/2$$

iii) Είναι $\lambda_1\lambda_2=-1$ κ.λ.π.

iv) Τα $A\left(\frac{p}{2},p\right)$, $B\left(\frac{p}{2},-p\right)$ ανήκουν στην έλλειψη αν και μόνον αν:

$$\frac{p^2}{4\alpha^2}+\frac{p^2}{\beta^2}=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}+4\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}+4\frac{\gamma^2}{(\alpha^2-\gamma^2)}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}+4\frac{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}=1 \qquad \left(\textit{γιατί } \varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2+4\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}=1 \Leftrightarrow \varepsilon^4-6\varepsilon^2+1=0 \quad \text{(διτετράγωνη)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2=3\pm2\sqrt{2} \Leftrightarrow \varepsilon^2=3-2\sqrt{2} \quad \text{γιατί } 0<\varepsilon<1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$