

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β ΛΥΚΕΙΟΥ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1.

α) i) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ν' αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση:

<u>ΣΤΗΛΗ Α</u> ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{\alpha}$	<u>ΣΤΗΛΗ Β</u> Γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα των x.
α) $\vec{\alpha} = (-1, -1)$	1) $\frac{\pi}{4}$
β) $\vec{\alpha} = (-1, 1)$	2) $\frac{3\pi}{4}$
γ) $\vec{\alpha} = (1, -1)$	3) $\frac{5\pi}{4}$
δ) $\vec{\alpha} = (1, 1)$	4) $2\pi - \frac{\pi}{4}$
ε) $\vec{\alpha} = (0, -1)$	5) $\frac{3\pi}{2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) i) Ν' αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου γράφεται στην μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Να γράψετε τον τύπο που δίνει την απόσταση $d(M, \varepsilon)$ του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

γ) Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις επόμενες προτάσεις

(i) έως (v):

i) Η εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y - 1 = 0$ παριστάνει κύκλο.

ii) Ο κύκλος $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ που διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι πάντα $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iv) Τα σημεία $M(x, y)$ με $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ με $\varphi \in [0, 2\pi)$ και $\rho > 0$ βρίσκονται στον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$.

v) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο C ο οποίος έχει κέντρο K και ακτίνα $\rho > 0$, τότε $d(K, \varepsilon) > 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

δ) Οι τιμές του ακεραίου αριθμού a είναι τέτοιες, ώστε να διαιρεί το 11.

($a/11$). Δίνονται οι επόμενες προτάσεις (i) ως (iv):

i) Υπάρχει τιμή του a , ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = ax + 3$ να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$

ii) Υπάρχει τιμή του a , ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (11, 2)$ να είναι αντίθετο με το $\vec{u} = (a, -2)$

iii) Οι κύκλοι $C_1: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16,$

$$C_2: (x - a)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

είναι ομόκεντροι.

iv) Ο αριθμός a διαρεί τον (-11) .

Από τις επόμενες απαντήσεις P_1, P_2, P_3 η μία είναι σωστή και οι άλλες δύο λάθος. Να βρείτε την σωστή απάντηση.

P_1 : Οι προτάσεις (i) και (iii) είναι λάθος.

P_2 : Οι προτάσεις (i) και (ii) ισχύουν για την ίδια τιμή του α .

P_3 : Οι προτάσεις (i), (ii), (iv) είναι σωστές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μη μηδενικοί ακέραιοι α, β, γ με $2003 \cdot \beta + 2004 \cdot \gamma = 1$.

Ν' αποδείξετε ότι:

α) $(\beta, \gamma) = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) $(\alpha \cdot \gamma, \beta) = (\alpha, \beta)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Για κάθε φυσικό αριθμό n είναι: $(\alpha \cdot \gamma^n, \beta) = (\alpha, \beta)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

δ) $[\alpha \cdot \gamma^n, \beta] = |\gamma|^n [\alpha, \beta]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 3ο

A). Δίνονται τα μη συγγραμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Ν' αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \right) \vec{\alpha}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

iii) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v} = (1, 2)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{u} = (-3, 4)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

B). Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ με ύψος ΑΔ και πλευρές (ΑΒ)=γ, (ΑΓ)=β. Ν' αποδείξετε ότι:

$$(\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma) \cdot \vec{B\Delta} + (\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B) \cdot \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4ο

Η εστία της παραβολής $C_1: y^2 = 2px$, $p > 0$ συμπίπτει με μία εστία της

έλλειψης $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < \alpha$.

α) Ν' αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}\right)$ ανήκουν σε μία ισοσκελή υπερβολή.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Έστω (ϵ_1) , (ϵ_2) οι εφαπτόμενες της παραβολής που άγονται από την εστία της έλλειψης που δεν είναι εστία της παραβολής.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των (ϵ_1) , (ϵ_2) και να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Α, Β των (ϵ_1) , (ϵ_2) με την παραβολή C_1 .

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ii) Να δείξετε ότι οι (ϵ_1) , (ϵ_2) τέμνονται κάθετα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ) Αν τα σημεία Α, Β ανήκουν στην έλλειψη C_2 ν' αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητά της ϵ είναι: $\epsilon = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8