ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2002 ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) α. Να αποδειχτούν οι τύποι: $ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2}$ και $συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $22{,}5^o$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Β) α. Να δώσετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Αν $α_ν$, $β_ν$, $ν \in N^*$ είναι μία αριθμητική και μία γεωμετρική πρόοδος με διαφορά ω και λόγο λ αντίστοιχα, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $α_{ν+1}$	1. $\frac{ν}{2}(α_1+α_ν)$
β. $β_{ν+1}$	2. $α_1+(ν-1)ω$
γ. $α_ν$	3. $β_1λ^ν$
δ. $β_ν$	4. $α_ν+ω$
ε. $S_ν$	5. $\frac{β_{ν+1}}{λ}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\ln e=1$

β. $\log e=\frac{1}{\ln 10}$

γ. $\ln 0=1$

δ. $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$ με $x>0$

ε. $α^x>0$ με $α>0$ και $x \in R$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^3+\alpha x^2+x+2$, $Q(x)=\beta x^2+\gamma x+1$ και $F(x)=x^3+(2\beta+\gamma)x^2-10x+4\beta$, όπου $\alpha,\beta,\gamma,x\in R$. Το $P(x)$ έχει ρίζα το -1, το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x-2)$ είναι 15 και η αριθμητική τιμή του $F(x)$ για $x=1$ είναι 6.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

β. Να λύσετε:

i) την εξίσωση $P(x)=Q(x)$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ii) την ανίσωση $P(x)<F(x)$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

iii) την εξίσωση $2\eta\mu^3x-\eta\mu^2x-2\eta\mu x+1=0$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(0)=f(1)=0$ και τύπο $f(x)=\log(1+e^x)-\alpha-\beta x$, $\alpha,\beta\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Να βρείτε τις τιμές των α,β.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\log\left[\dfrac{1+e^x}{(1+e)^x}\cdot 2^{x-1}\right]$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

δ. Να λύσετε την ανίσωση $\log[(1+e^x)2^{x-1}]-f(x)\leq x$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ 4^o

Η ποσότητα μιας τοξικής ουσίας Τ στα νερά μιας λίμνης ανέρχεται σε 3 μονάδες και αρχίζει να αυξάνεται με την έναρξη της λειτουργίας μιας παραλίμνιας βιομηχανίας κατά 0,5 μονάδες ημερησίως.

Α) α. Να βρείτε σε πόσες ημέρες η ποσότητα της ουσίας Τ θα ξεπεράσει το όριο των 1863 μονάδων. (δίνεται $29929=173^2$)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β. Αν το 30% της ποσότητας της ουσίας Τ που διοχετεύεται από την βιομηχανία στην λίμνη κάθε ημέρα, αδρανοποιείται κατά την διάρκειά της, πόση θα παραμείνει ενεργή στο τέλος της $82^{ης}$ ημέρας;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β) Ο πληθυσμός Α=100 χιλιάδες μιας ποικιλίας ψαριών της λίμνης, αρχίζει να μειώνεται αμέσως μετά την έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας με ρυθμό 1%. Έστω β_ν ο αριθμός των ψαριών που πεθαίνουν κατά τη διάρκεια της ν-οστής ημέρας.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία β_ν, $\nu\in N^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος με γενικό όρο: $\beta_\nu=0{,}01A(0{,}99)^{\nu-1}$ χιλιάδες.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

β. Να βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών που απέμειναν στην λίμνη ύστερα από ν=5 ημέρες.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)