# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## Θέμα 1ο

| | | |
|---|---|---|
| $A_1$, $A_2$, $A_3$ | Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 60-61) | |
| $B_1$: | α | 4 |
| | β | 1 |
| | γ | 2 |
| $B_2$ | το Γ | |

## Θέμα 2ο

**α)** Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\dfrac{2\pi}{3} = 1\cdot 1\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$$\left(4\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\right)^2 = 16\vec{\beta}^2+4\vec{\alpha}^2+16\vec{\alpha}\vec{\beta} = 16+4-8 = 12$$

$$\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 = 1+1+1 = 3$$

**β)** Από τη διανυσματική ακτίνα μέσου είναι

$$2\,\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$$

ή $2\,\overrightarrow{AM}=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-3\vec{\beta}$

ή $\overrightarrow{AM}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

Ακόμα, $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=-3\vec{\beta}-(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})=-4\vec{\beta}-2\vec{\alpha}$

**γ)** Είναι $\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{B\Gamma}|}$ (1)

αλλά $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\left(-4\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)$

$= 4\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}$

$= 4-2+1=3$

και $|\overrightarrow{AM}|^2 = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = 3$, άρα $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{3}$

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 = \left|-4\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right|^2 = \left(4\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)^2 = 12, \quad \text{άρα} \ \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = 2\sqrt{3}$$

Έτσι η (1) δίνει

$$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε: } \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

## Θέμα 3ο

**1ος τρόπος.**

**α)** Αφού ο α είναι περιττός, υπάρχει ακέραιος λ, ώστε:

$$\alpha = 2\lambda+1 \ \text{ άρα } \ \kappa-1 = 2\lambda+1 \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda+2$$

Τότε, $\beta = 3\kappa+1 = 3(2\lambda+2) + 1 = 6\lambda + 6 + 1 = 6\lambda + 7 = 2(3\lambda+3) + 1$ οπότε β=περιττός

**β)**

| | |
|---|---|
| Είναι | $\kappa-1/3\kappa+1$ πρέπει $\kappa-1 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 1$ (1) |
| Και προφανώς | $\kappa-1/3(\kappa-1)$ |
| Άρα | $\kappa-1/3\kappa+1-3(\kappa-1) \Leftrightarrow \kappa-1/4$ |
| Έτσι | $\kappa-1=\pm 1$, $\kappa-1=\pm 2$, $\kappa-1=\pm 4$ |
| Οπότε, | κ=0, κ=2, κ=-1, κ=3, κ= -3, κ=5 Δεκτές τιμές από (1). |

**γ)** i)

| | |
|---|---|
| | $2\alpha+1 = 2(\kappa-1)+1=2\kappa-1$ |
| | $\beta-3 = 3\kappa+1-3 = 3\kappa-2$ |
| Έστω | $\delta = (2\alpha+1, \beta-3)$ τότε |
| | $\delta/2\alpha+1 \Leftrightarrow \delta/2\kappa-1$ |
| | $\delta/\beta-3 \Leftrightarrow \delta/3\kappa-2$ |
| Έτσι | $\delta/3(2\kappa-1)-2(3\kappa-2) \Leftrightarrow \delta/1$, οπότε $\delta=1$ |

ii)

$$[2\alpha+1, \beta-3] = \left|(2\alpha+1)(\beta-3)\right|$$
$$= \left|(2\kappa-1)(3\kappa-2)\right|$$
$$= \left|6\kappa^2-7\kappa+2\right|$$

Το τριώνυμο $6\kappa^2-7\kappa+2$ έχει ρίζες $\kappa_1=\frac{1}{2}$, $\kappa_2=\frac{2}{3}$ και γίνεται αρνητικό μεταξύ των ριζών του, όπου όμως δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ. Έτσι $6\kappa^2-7\kappa+2>0$ οπότε

$$|6\kappa^2-7\kappa+2| = 6\kappa^2-7\kappa+2$$

Και έτσι $|2\alpha+1,\beta-3| = 6\kappa^2-7\kappa+2$

**2ος τρόπος.**

Από $\alpha=\kappa-1$ και $\beta=3\kappa+1$ προκύπτει $\beta=3\alpha+4$

α) με α περιττό είναι 3α περιττός, έτσι 3α+4 περιττός, άρα β περιττός.

β) $\alpha/\beta \Leftrightarrow \alpha/3\alpha+4 \Leftrightarrow \alpha/4 \Leftrightarrow \kappa-1/4$ κλπ.

γ) $(2\alpha+1, \beta-3) = (2\alpha+1, 3\alpha+1) = (2\alpha+1, 3\alpha+1-2\alpha-1) = (2\alpha+1, \alpha) = (2\alpha+1-2\alpha, \alpha) = (1, \alpha) = 1$

δ) παρομοίως.

**3ος τρόπος για το β).**

$$\alpha/\beta \Leftrightarrow \beta=\lambda\alpha \Leftrightarrow 3\kappa+1=\lambda(\kappa-1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \kappa=\frac{\lambda+1}{\lambda-3}=\frac{\lambda-3+1}{\lambda-3}=1+\frac{4}{\lambda-3}\in Z$$

άρα $\lambda-3=\pm1, \pm2, \pm4$ και άρα $\kappa=1+(\pm4)$, $1+(\pm2)$, $1+(\pm1)$ κλπ. (... με τους περιορισμούς των α, λ).

## Θέμα 4ο.

**α)** $C_1$: $(x-12)^2+(y-6)^2=10$
$C_2$: $(x-12)^2+(y-6)^2=16$

**β)** Είναι $(KA)=\ldots=\sqrt{5}<\rho_1=\sqrt{10}$

$(KB)=\ldots=\sqrt{13}$, $\rho_1<\sqrt{13}<\rho_2=4$

Άρα:

- Το Α ανήκει στο κυκλικό δίσκο που ορίζει ο $C_1$ άρα στο Α η λήψη είναι "πολύ καλή".
- Το Β είναι εξωτερικό σημείο του $C_1$ και εσωτερικό του $C_2$ οπότε στο β η λήψη είναι "καλή".

**γ)** ( Σχετική θέση ευθείας και κύκλου.)

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|12-6-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

και αφού $\sqrt{10} < \dfrac{5}{\sqrt{2}} < 4$

είναι $\rho_1 < d(K, \varepsilon) < \rho_2$

Επομένως, υπάρχει τμήμα με "καλή" λήψη και δεν υπάρχει αντίστοιχο τμήμα με "πολύ καλή" λήψη.