• ΛΥΚΕΙΟ • ΓΥΜΝΑΣΙΟ • ΕΠΑΛ • ΔΗΜΟΤΙΚΟ • ΜΕΛΕΤΗ
Εκπαίδευση Γνώση - Επιτυχία
Χιώτης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
Πιστοποιημένο Εξεταστικό Κέντρο ECDL
ΑΕΙ - ΕΡΓΑΣΙΕΣ - ΠΤΥΧΙΑΚΕΣ
ΞΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ - www.hiotis.edu.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (σχολικό βιβλίο σελ. 65)

$$f_1+f_2+\cdots+f_k=\frac{\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\cdots+\frac{\nu_k}{\nu}=\frac{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}=1.$$

Α2. (σχολικό βιβλίο σελ. 87)

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3. (σχολικό βιβλίο σελ. 27)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, και Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται η συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f΄.

Α4. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x)=\frac{1}{3}3x^2-2x-3=x^2-2x-3$.

Β2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16 \text{ άρα } x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται παρακάτω

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f′(x)		+	**0**	–	**0**	+	
f		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$ το $f(-1)=\frac{8}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$ το $f(3)=-8$.

Β3. Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$ ή $A(0,1)$.Είναι

$$\alpha=f'(0)=-3$$

και το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην ευθεία άρα

$$y=-3x+\beta \text{ και } 1=-3\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=1.$$

Οπότε, $y=-3x+1$.

Β4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-3)=-4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\bar{x}=4\Leftrightarrow\frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7}=4\Leftrightarrow\frac{23+\kappa}{7}=4\Leftrightarrow 23+\kappa=28\Leftrightarrow\kappa=5$.

Γ2. Για $\kappa=5$ οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι:

$$0,3,4,4,5,5,7$$

οι οποίες είναι περιττού πλήθους και η διάμεσος τους είναι η μεσαία παρατήρηση, οπότε:

$$\delta=t_{\frac{7+1}{2}}=t_4=4.$$

Γ3. Η διακύμανση είναι:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{x})^2}{7}=\frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+(t_3-\bar{x})^2+(t_4-\bar{x})^2+(t_5-\bar{x})^2+(t_6-\bar{x})^2+(t_7-\bar{x})^2}{7}$$

$$=\frac{(0-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{7}$$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$

Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

και ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ή } 50\%.$$

Εφόσον, $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού το εμβαδό Ε του οικοπέδου είναι ίσο με 100 m^2 έχουμε

$$E = 100 \Leftrightarrow xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}.$$

Η περίμετρος Π του οικοπέδου θα είναι:

$$\Pi = 2x + 2y \overset{y=\frac{100}{x}}{\Leftrightarrow} \Pi = 2x + 2\frac{100}{x} \Leftrightarrow \Pi = 2x + \frac{200}{x}.$$

Άρα η περίμετρος Π ως συνάρτηση του x είναι

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x},\ x > 0.$$

Δ2. Είναι $\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2},\ x > 0$.

Ισχύει ότι $\frac{2}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα οι ρίζες και το πρόσημο της $\Pi'(x)$ εξαρτώνται από το $x^2 - 100$.

- $x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 10.$

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$	$-$	0	$+$
Π	↘		↗

Ο.Ε.

Η συνάρτηση Π είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [10,+\infty)$.

Η συνάρτηση Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 10$ οπότε $y = \frac{100}{10} = 10$.

Άρα το ορθογώνιο με την ελάχιστη περίμετρο είναι τετράγωνο πλευράς μήκους 10 m.

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$x_1 < x_2 \underset{\Pi \text{ γν. φθίν. στο } (0,10)}{\overset{x_1, x_2 \in (0,10)}{\Rightarrow}} \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Rightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0 \overset{x_1 - x_2 < 0}{\Rightarrow} \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Δ4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \lim_{x\to 10} \frac{\dfrac{2(x^2-100)}{x^2}}{\sqrt{10x}-10} \\
&= \lim_{x\to 10} \frac{2(x^2-100)}{\left(\sqrt{10x}-10\right)x^2} \\
&= \lim_{x\to 10} \frac{2(x-10)(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{\left(\sqrt{10x}-10\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)x^2} \\
&= \lim_{x\to 10} \frac{2(x-10)(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{(10x-100)x^2} \\
&= \lim_{x\to 10} \frac{2(x-10)(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10(x-10)x^2} \\
&= \lim_{x\to 10} \frac{2(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2} \\
&= \frac{2(10+10)\left(\sqrt{10\cdot 10}+10\right)}{10\cdot 10^2} \\
&= \frac{2\cdot 20\cdot 20}{1000} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ