ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 133)

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 51)

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ 185)

Α4. α) ΛΑΘΟΣ β) ΣΩΣΤΟ γ) ΣΩΣΤΟ δ) ΣΩΣΤΟ ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f=(1,+\infty)$, $D_g=[2,+\infty)$

Η $h=f\circ g$ ορίζεται όταν και μόνο όταν:

$x\in D_g \Leftrightarrow x\geq 2$

και

$g(x)\in D_f \Leftrightarrow g(x)>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}>0 \Leftrightarrow x>2$

Επομένως $D_h=(2,+\infty)$ με:

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)$$

$$=2\ln\sqrt{x-2}=\ln\sqrt{x-2}^{\,2}=\ln(x-2)$$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με:

$h'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0 \Rightarrow h \nearrow D_h$ οπότε είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο D_h, οπότε:

$$h(D_h)=\left(\lim_{x\to 2^+}h(x),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \overset{x-2=u}{\underset{u_0=0}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x-2) \overset{x-2=u}{\underset{u_0=+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

Για κάθε $x \in D_h = (2,+\infty)$ και $y \in h(D_h) = \mathbb{R}$

θέτουμε $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln e^y \Leftrightarrow x-2 = e^y$
$\Leftrightarrow x = e^y + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2, y \in \mathbb{R}$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot \dfrac{f(x)}{x-2} \right) \overset{-\infty\cdot 2}{=} -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$ από Β2

και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1} = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Εφόσον η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa > 0$ τότε:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \kappa x = +\infty$ το οποίο είναι άτοπο.

Αν $\kappa < 0$ τότε:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \kappa x = -\infty$ το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως $\kappa = 0$

ii) Αν $\mu = 0$ τότε είναι $f(x) = 0$ η οποία απορρίπτεται αφού η f έχει εφαπτομένη την $y = x$ στο σημείο $(0,0)$ οπότε θα πρέπει $f'(0) = 1$

Αν $\mu \neq 0$ τότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mu \cdot \frac{1}{x} = 0$ το οποίο είναι δεκτό.

Άρα για $\kappa = 0$ και $\mu \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

Αφού η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στην αρχή τον αξόνων τότε πρέπει:

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu - 0}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

Οπότε είναι $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Γ2. i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x < -1$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f		↘	Τ.Ε	↗	Τ.Μ	↘	

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = -\frac{1}{2}$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, διότι:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Στο $\Delta_2=[-1,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(\Delta_2)=[f(-1),f(1)]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $f(\Delta_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$, διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(D_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ έχουμε:

Είναι $\frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\frac{1}{2}+\alpha^2>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha\neq0$ τότε το $\frac{1}{2}+\alpha^2\notin f(D_f)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ είναι αδύνατη για $\alpha\neq0$.

Αν $\frac{1}{2}+\alpha^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση την $x=1$

Γ3. i) $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx=$

$$=\int_0^1x^{2\nu+1}dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}$$

Άρα $I_\nu+I_{\nu+1}=\frac{1}{2\nu+2}\ (1)$

ii) $I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln2$

Για $\nu=0$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_0+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln2$$

Για $\nu=1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ ορισμένη στο $[-1,0]$

- Η h είναι συνεχής το $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$

και

$$h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$$

διότι από υπόθεση ξέρουμε ότι $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Επίσης η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$$

Όμως h' είναι συνεχής στο $(-1,0)$ διότι η g' είναι συνεχής στο $(-1,0)$ από υπόθεση άρα η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,0)$.

Συνεπώς η h είναι γνησίως μονότονη άρα το x_1 μοναδική ρίζα της h στο $(-1,0)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x) + x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(xg(x) + x^2\right) = 0g(0) + 0 = 0$$

διότι η g είναι συνεχής.

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Συνεπώς

$$3-\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=3$$

Δ3.

i) Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$, παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$, άρα η συνάρτηση f ως συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι :

Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$: $x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$ (οεδ)

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)=+\infty$, γιατί :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}3x=\frac{3\pi}{2}$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\varepsilon\varphi x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=+\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1>0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sigma\upsilon\nu x=0$ και $\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Έτσι, αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=[0,+\infty)$. Τέλος,

$\frac{\pi}{3}\in[0,+\infty)=f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$, το οποίο είναι μοναδικό επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (οεδ)

Δ4.

i) Η συνάρτηση $h(x)=g(x)+x$, $x\in[x_1,0]$, είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=g'(x)+1$ που είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $(x_1,0)$, αφού $g'(x)\neq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_1,0)$.

Αν είναι $h'(x)<0$, για κάθε $x\in(x_1,0)$, τότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,0]$. Έτσι :

$x_1<0 \Rightarrow h(x_1)>h(0)\overset{\Delta 1}{\Rightarrow} 0>g(0)$, που είναι άτοπο, αφού $0<g(x)<1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα είναι $h'(x)>0$, οπότε h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,0]$ και έτσι :

$x_1\leq x\leq 0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x_1)\leq h(x)\leq h(0) \Rightarrow 0\leq g(x)+x\leq g(0)$. Αλλά :

Στο διάστημα $[x_1, 0)$ είναι $f(x) = x^2 h(x) \geq 0$ και αφού $f(0) = 0$, τελικά είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$, όπως θέλαμε.

ii) Το χωρίο που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι το

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

Δίνεται ότι $\int_{x_1}^{0} f(x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow I_1 = I_2$ (1)

$$I_1 = \int_{x_1}^{0} f(x) dx = \int_{x_1}^{0} x^2 (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx \ (2)$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x) dx = \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx =$$

$$= 0 - \frac{x_1^3}{3} g(x_1) - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx \overset{\Delta 1}{=} -\frac{x_1^3}{3}(-x_1) - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx$$

και

$$\int_{x_1}^{0} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = -\frac{x_1^4}{4}$$

Άρα από τη σχέση (2)

$$I_1 = \frac{x_1^4}{3} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = -\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} \ (3)$$

$$I_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + 2\sigma\upsilon\nu 0 + \ln(\sigma\upsilon\nu 0) =$$

$$= -1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \ (4)$$

Από τη σχέση (1), εξ' αιτίας των (3) και (4) έχουμε :

$$-\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x) dx = -\frac{x_1^4}{12} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$