ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 225

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 303

Α3. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z - i| = 1 + \mathrm{Im}(z) \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = 1 + y \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 + y \overset{y > -1}{\Leftrightarrow} x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1} \Leftrightarrow x^2 = 4y \Leftrightarrow \mathbf{y = \frac{1}{4}x^2}$

Β2. $w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \Leftrightarrow w\bar{w} + 3wi = 3\bar{w}i - 1 \Leftrightarrow$

$|w|^2 + 3(w - \bar{w})i + 1 = 0 \Leftrightarrow \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 + 3 \cdot 2yi \cdot i + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 8$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $\mathbf{K(0\,,3)}$ και ακτίνα $\mathbf{\rho = 8 = 2\sqrt{2}}$

Β3. Αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

$$\begin{cases} x^2 = 4y \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$(1) \overset{y=1}{\Rightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Άρα $\mathbf{A(2\,,1)}$ και $\mathbf{B(-2\,,1)}$.

Β4. $(KA) = (KB) = \rho = 2\sqrt{2} \to$ **ΚΑΒ ισοσκελές**

$$\left.\begin{aligned} (AB)^2 &= \left(\sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2}\right)^2 = 16 \\ (KA)^2 + (KB)^2 &= 8 + 8 = 16 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Π.Θ.}}{\Rightarrow} \textbf{KAB ορθογώνιο}$$

Μ μέσο του ΑΒ $\to$ Μ (0 , 1)

Μ μέσο του ΚΛ $\to$ Λ (0 , -1) $\to$ $\mathbf{u = -i}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)'$, $t \geq 0$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16t + c$, $t \geq 0$

Για $x = 0$ είναι $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $\mathbf{x(t) = 16t,\ t \geq 0}$

Γ2. **Παρατήρηση: Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο Α.**

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

Αναζητούμε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από το σημείο Π (0 , 1).

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(x - x_0)$$

$$\Pi \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(-x_0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} - 2x_0 = -x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 4x_0 = x_0^2 \Leftrightarrow \cancel{x_0 = 0} \text{ ή } x_0 = 4$$

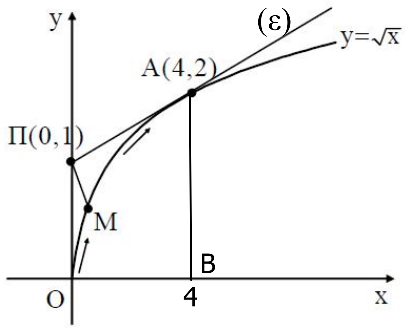
Για $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow$ **Α (4 , 2)**

$$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}\text{min} \text{ ή } t_0 = 15\text{sec}$$

Άρα η οπτική επαφή διαρκεί **15sec**

Γ3. *1η λύση*

Η εφαπτομένη της C_f στο Α (4 , 2) είναι η $(\varepsilon): y = \frac{1}{4}x + 1$



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 x\,dx + \int_0^4 1\,dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + [x]_0^4 - \frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_0^4 = 2 + 4 - \frac{16}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}m^2}$$

2η λύση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = (\text{ΟΠΑΒ}) - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{(\text{ΟΠ})+(\text{ΑΒ})}{2}\cdot(\text{ΟΒ}) - \frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_0^4 = 6 - \frac{16}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}m^2}$$

Γ4. **1η λύση**

$M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{x}) \rightarrow M(16t, 4\sqrt{t})$

$d(t) = (ΠM) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}\right)' = \frac{256t + 8 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(t) = 256t + 8 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$

$g'(t) = 256 + \dfrac{1}{t\sqrt{t}} > 0$, άρα η g είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$

1ος τρόπος

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών
- $g\left(\dfrac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$
- $g\left(\dfrac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$

Από Θ. Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2ος τρόπος

- Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{4}\right]$
- $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t \to 0^+}\left(256t + 8 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\infty$
- $g\left(\dfrac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty, 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$$

x	0	t_0	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η d είναι γν. φθίνουσα στο $(0\,,\,t_0]$ και γν. αύξουσα στο $[t_0\,,\,+\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0\,,\,\frac{1}{4}\right)$

2η λύση

$M(x\,,\,y) \rightarrow M(x\,,\,\sqrt{x}) \rightarrow M(16t\,,\,4\sqrt{t})$

$$d(t) = (\Pi M) = \sqrt{(16t-0)^2 + (4\sqrt{t}-1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}\right)' = \frac{256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Είναι $d'(t) > 0$, για $t > \frac{1}{4}$, άρα η d είναι γν. αύξουσα στο $\left(\frac{1}{4}\,,\,+\infty\right)$

Η συνάρτηση d είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[0\,,\,\frac{1}{4}\right]$, άρα από θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής υπάρχει $t_0 \in \left[0\,,\,\frac{1}{4}\right]$ τέτοιο ώστε η d να παρουσιάζει ελάχιστο στο t_0.

- $d(0) = 1$
- $d\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{17}$
- $d\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4} < d(0) < d\left(\frac{1}{4}\right)$,

άρα η d να παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $t_0 \in \left(0\,,\,\frac{1}{4}\right)$.

Επομένως η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0\,,\,\frac{1}{4}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$= 0\cdot[1+f(0)] = 0,$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1+f(0) = 1$

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \quad \Leftrightarrow$

$\mathbf{(\varepsilon): \ y = x}$

Δ2. Θ.Μ.Τ. με τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0\ ,\ 1]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0\ ,\ 1)$, τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi) = f(1) - f(0)$ **(1)**

Είναι $f'(0) < f(1) - f(0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi)$ **(2)**

Επίσης $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in IR$ και επειδή η f''

είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, από συνέπειες Θ. Bolzano

η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR.

1ος τρόπος Η f' είναι γνησίως μονότονη στο IR.

Είναι $0 < \xi$ και $f'(0) < f'(\xi)$ από **(2)**

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο IR,

2ος τρόπος Θ.Μ.Τ. με τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[0\ ,\ \xi]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0\ ,\ \xi)$, τέτοιο ώστε

$f''(\xi_1) = \frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi - 0} > 0$, από (2)

Επομένως είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$,

Άρα **η f είναι κυρτή στο IR**.

Δ3. **1η λύση**

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0\ ,\ 0)$ είναι η $(\varepsilon): y = x$.

Η f είναι κυρτή στο IR, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την

(ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $O(0\ ,\ 0)$

$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ και το ¨=¨ ισχύει για $x = 0$.

Άρα **η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή g (0) = 0.**

$2^η$ λύση

Είναι $g(x) = f(x) - x, x \in IR$.

$g'(x) = f'(x) - 1, x \in IR$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0)$

και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή $g(0) = f(0) = 0$.

$\mapsto \lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x \cdot g(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{ημx}{x} \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = +\infty$, διότι

$\lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, με $g(x) \geq 0$.

Δ4. Είναι $g(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int_0^2 g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [f(x) - x]\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 xdx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx > \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\int_0^2 f(x)\,dx > 2}$$

Δ5. Είναι $g(x) \geq 0$, άρα $E = \int_0^1 g(x)\,dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\int_0^1 [f(x) - x]\,dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\int_0^1 f(x)\,dx = e - 2 \quad (1)}$$

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2, x \in [1, 2]$

- Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
- $h(1) = \int_0^1 f(t)\,dt - 2 \overset{(1)}{=} e - 2 - 2 = e - 4 < 0$

  $h(2) = \int_0^2 f(t)\,dt - 2 > 0$ από Δ4

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (1, 2)$

τέτοιο ώστε $h(ξ) = 0 \Leftrightarrow \int_0^ξ f(t)\,dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\int_0^ξ f(t)\,dt = 2}$.